Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Akademska 2014/2015.

Sadržaj sveske sa vježbi iz predmeta
Inžinjerska matematika III

Literatura za dodatno spremanje ispita:
- H. Fatkić, V. Dragičević;Diferencijalni račun funkcija dviju i više promjenjivih, Svjetlost, Sarajevo 1990
- F. Čunjalo; Uvod u teoriju vjerovatnoće sa rješenim zadacima; Sarajevo 2013
- H.Fatkić; Vjerovatnoća i statistika, I . dio, Corons, Sarajevo, 2000
- S. Gilezan, Lj. Nedović, Z. Lužanin, Z. Ovcin, T. Grbić, J. Ivetić, B. Mihailović, K. Doroslovački; Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike; Novi Sad, 2009. godine
- T. Pejović; Diferencijalne jednačine II – obične diferencijalne jednačine višeg reda i sistemi jednačina, 4 izdanje, Univerzitet u Beogradu
- V. Perić; M. Tomić, P. Karačić, Zbirka riješenih zadataka iz Matematike II, IP Svjetlost, Sarajevo 1991
- T. Subašić; Vjerovatnoća i matematička statistika – zbirka rješenih zadataka, Zenica 2007
- N. Elezović; Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija; Element 2006

Dio tablice izvoda

1) $(c)'=0$; 2) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

3) $(uv)'=u'v+v'u$; 3a) $(cu)'=cu'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$; 4a) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$;

4б) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$; 5) $(x^n)'=nx^{n-1}$;

6) $(\sin x)'=\cos x$; 7) $(\cos x)'=-\sin x$;

8) $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$; 9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$.

5) $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$; 8) $(\operatorname{tg} u)'=\sec^2 u\cdot u'$;

6) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$; 9) $(\operatorname{ctg} u)'=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$.

7) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

10) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$; 11) $(\log u)'=\frac{u'}{u}\log e$;

10a) $(e^u)'=e^u u'$; 11a) $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$;

10б) $(a^x)'=a^x\ln a$; 11б) $(\log x)'=\frac{1}{x}\log e$;

10в) $(e^x)'=e^x$; 11в) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

12) $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 12a) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 13a) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arc\,tg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$; 14a) $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arc\,ctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$; 15a) $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Dio tablice integrala

1. $\int u^a\,du=\frac{u^{a+1}}{a+1}+C,\ a\neq-1.$

2. $\int u^{-1}\,du=\int\frac{du}{u}=\int\frac{u'}{u}\,dx=$
$=\ln|u|+C.$

3. $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C;\ \int e^u\,du=$
$=e^u+C.$

4. $\int \sin u\,du=-\cos u+C.$

5. $\int \cos u\,du=\sin u+C.$

6. $\int \sec^2 u\,du=\operatorname{tg} u+C.$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du=-\operatorname{ctg} u+C.$

8. $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$

9. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$

10. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C.$

11. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a}}=$
$=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right|+C.$

[10] *Na koliko različitih načina se može izabrati 8 karata iz špila od 52 karte tako da među izabranim kartama bude*

(a) *tačno 2 sedmice i 3 keca,*

(b) *tačno 2 sedmice i bar 3 keca?*

Rešenje: Označimo sa s_i broj načina izbora i sedmica, sa k_j broj načina izbora j kečeva, a sa o_k broj načina izbora k karata među kojima nema ni sedmica ni kečeva (takvih karata u špilu ima $52-4-4=44$). Analogno postupku iz zadatka [9], koristeći pravilo proizvoda izračunavamo

(a) $s_2k_3o_3 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_3^{44} = 317856$.

(b) $s_2k_3o_3 + s_2k_4o_2 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_3^{44} + \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_4^4 \cdot \mathrm{C}_2^{44} = 317856 + 5676 = 323532$.

---

[11] *Hor se sastoji od 10 članova. Na koliko načina se može birati po 6 članova za nastup, za svaki od 3 dana turneje hora, ali tako da*

(a) *sastavi za nastup različitih dana mogu biti isti,*

(b) *sastavi za nastup različitih dana ne mogu biti isti?*

Rešenje:

(a) Svakog dana se bira podskup od 6 članova iz skupa od 10 članova hora (kombinacije bez ponavljanja od 10 elemenata klase 6). Dakle, primenom pravila proizvoda dobijamo da je broj izbora $\mathrm{C}_6^{10} \cdot \mathrm{C}_6^{10} \cdot \mathrm{C}_6^{10} = 210^3 = 9261000$.

(b) Prvog dana se, naravno, sastav može birati na $\mathrm{C}_6^{10} = 210$ načina, drugog dana je broj izbora za jedan manji, a trećeg dana je broj izbora još za jedan manji. Sledi da primenom pravila proizvoda dobijamo za ukupan broj načina biranja $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9129120$.

---

[12] *Betoven je napisao ukupno 9 simfonija, Mocart 27 koncerata za klavir, a Šubertovih gudačkih kvarteta ima 15.*

(a) *Radio stanica u večernjoj muzičkoj emisiji svakog dana pušta po jednu Betovenovu simfoniju i jedan Mocartov klavirski koncert. Koliko najviše dana zaredom stanica može da pravi različite emisije (emisije koje se razlikuju u bar jednoj od dve kompozicije koje emituje, pri čemu ne smatramo različitim emisije u kojima su iste kompozicije emitovane obrnutim redosledom)?*

(b) *Ako urednik pomenute emisije svake večeri pušta prvo jednu Betovenovu simfoniju, zatim jedan Mocartov klavirski koncert, i na kraju jedan Šubertov gudački kvartet, koliko dugo urednik može na ovaj način da pravi emisije?*

Rešenje:

(a) Koristeći pravilo proizvoda dobijamo da je broj različitih emisija (broj mogućih izbora) $9 \cdot 27 = 243$.

(b) Na isti način kao pod (a) se dobija da je broj mogućih načina izbora emisija $9 \cdot 27 \cdot 15 = 3645$, što je $(3645 = 9 \cdot 365 + 360)$ približno 10 godina.

[13] *Napisati sve dvocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara $1,2,3,4$ tako da se u jednom broju*

(a) *ne mogu nalaziti iste cifre,*

(b) *mogu nalaziti iste cifre.*

Rešenje:

(a) Ovakvih brojeva ima $\mathrm{V}_2^4 = 12$, i to su brojevi 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

(b) Ovakvih brojeva ima $\overline{\mathrm{V}}_2^4 = 16$, i to su brojevi 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

---

[14] *Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu napisati od cifara $1,2,3,4,5,6,7,8$ takvih da se u jednom broju*

(a) *ne mogu nalaziti iste cifre,*

(b) *mogu nalaziti iste cifre?*

Rešenje:

(a) $\mathrm{V}_4^8 = 1680$.

(b) $\overline{\mathrm{V}}_4^8 = 4096$.

---

[15] *Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima su sve cifre različite?*

Rešenje: Prvu cifru a biramo iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$, dakle postoji 9 mogućih izbora. Nakon što smo izbrali prvu cifru, ostale cifre biramo tako što od elemenata skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a\}$ (ima ih 9) sastavljamo uređenu 4-orku kod koje su sve komponente različite. Broj ovakvih izbora je (varijacije bez ponavljanja) $\mathrm{V}_4^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Primenom pravila proizvoda dobijamo da brojeva opisanog tipa ima $9 \cdot 3024 = 27216$.

Drugi način: Prva cifra broja ne može biti nula, te ćemo traženi broj dobiti kao $a - b$ gde je a ukupan broj nizova od 5 različitih cifara (gde i prva cifra može biti 0), a b je broj nizova od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0. Nizove od 5 različitih cifara pravimo tako što iz skupa od 10 cifara 5 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $a = \mathrm{V}_5^{10} = 30240$ načina. Nizove od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0 pravimo tako što iz skupa od 9 cifara (cifra 0 je „potrošena") 4 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $b = \mathrm{V}_4^9 = 3024$ načina. Prema tome, petocifrenih brojeva opisanog tipa ima $30240 - 3024 = 27216$.

[16] *Na šahovskom turniru učestvuje* 12 *šahista. Ako svaki šahista treba da odigra po jednu partiju sa svim ostalim šahistima, koliko će ukupno partija biti odigrano na turniru?*

Rešenje: Biće odigrano onoliko partija koliko ima parova šahista, tj. koliko ima dvočlanih podskupova skupa od 12 šahista, a taj broj je $\mathrm{C}_2^{12} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$.

---

[17] *Do vrha planine vodi* 5 *puteva. Na koliko načina planinar može da se popne i spusti sa vrha ako*

(a) *može da se spušta istim putem kojim se popeo,*

(b) *ne može da se spušta istim putem kojim se popeo?*

Rešenje: U oba slučaja se put za penjanje bira na 5 načina, a put za spuštanje se u prvom slučaju bira na 5, a u drugom na 4 načina, tako da rešenje glasi

(a) $\overline{\mathrm{V}}_2^5 = 5\cdot 5 = 25$,

(b) $\mathrm{V}_2^5 = 5\cdot 4 = 20$.

---

[18] *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* $1,1,1,2,2,2$*?*

Rešenje: Od zadanih cifara šestocifreni broj pravimo tako što cifre raspoređujemo u niz (bitan je redosled i koristimo sve cifre), ali među ciframa ima i jednakih, što znači da se radi o permutacijama sa ponavljanjem, te odgovor glasi $\mathrm{P}_{3,3}^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

---

[19] *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* $1,2,2,3,3,3$*?*

Rešenje: Na isti način kao u zadatku [18] dobijamo rešenje $\mathrm{P}_{1,2,3}^6 = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$.

---

[20] *Iz grupe od* 10 *muškaraca i* 8 *žena treba odabrati* 6 *osoba među kojima najmanje* 3 *treba da budu žene. Na koliko načina se može izvršiti ovakav izbor?*

Rešenje: Neka je $\check{z}_i$, $i\in\{3,4,5,6\}$ broj načina na koji se mogu odabrati i žena i $6-i$ muškaraca (ukupno 6 osoba). Traženi broj načina izbora je $\check{z}_3+\check{z}_4+\check{z}_5+\check{z}_6$. Kada pri izboru 6 osoba biramo i žena i $6-i$ muškaraca, tada iz skupa od 10 muškaraca biramo na $\mathrm{C}_{6-\mathrm{i}}^{10}$ načina podskup od $6-i$ elemenata, i iz skupa od 8 žena biramo na C_i^8 načina podskup od i elemenata, te na osnovu pravila proizvoda dobijamo da je $\check{z}_i = \mathrm{C}_{6-\mathrm{i}}^{10}\cdot\mathrm{C}_\mathrm{i}^8 = \binom{10}{6-i}\cdot\binom{8}{i}$. Prema tome,

$$\check{z}_3 = \binom{10}{3}\cdot\binom{8}{3} = 120\cdot 56 = 6720,\qquad \check{z}_4 = \binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4} = 45\cdot 70 = 3150,$$

$$\check{z}_5 = \binom{10}{1}\cdot\binom{8}{5} = 10\cdot 56 = 560,\qquad \check{z}_6 = \binom{10}{0}\cdot\binom{8}{6} = 1\cdot 28 = 28,$$

te rešenje zadatka glasi $6720+3150+560+28 = 10458$.

---

[21] *Koliko se reči (računajući i besmislene) može napisati koristeći slova* a,b,c,d,e *tako da se svako slovo u reči javlja najviše jednom i tako da reč*

(a) *obavezno sadrži slovo* a*,*

(b) *počinje slovom* a*?*

Rešenje: Neka je k_i broj reči dužine i, $i\in\{1,2,3,4,5\}$. Broj reči koje se mogu napisati u skladu sa zadatim uslovima je $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5$.

(a) Očigledno je $k_1 = 1$, a reč dužine i, $i\in\{2,3,4,5\}$ pravimo tako što osim slova a odaberemo još $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$, a zatim ova slova ređamo u niz. Izbor $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$ se može uraditi na $\mathrm{C}_{\mathrm{i}-1}^4$ načina, a izabrana slova i slovo a se zatim mogu poređati u niz na P_i načina (na primer, pri pisanju reči od 3 slova pored slova a možemo izabrati još parove slova $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$ i $\{d,e\}$, pa ako smo odabrali npr. slova $\{b,d\}$, tada možemo napisati reči *abd*, *adb*, *bad*, *bda*, *dab* i *dba*); prema tome, koristeći pravilo proizvoda, za $i\in\{2,3,4,5\}$ dobijamo $k_i = \mathrm{C}_{\mathrm{i}-1}^4\cdot\mathrm{P}_\mathrm{i}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{C}_1^4\cdot\mathrm{P}_2 = \tfrac{4!}{1!3!}\cdot 2! = 8,\qquad k_3 = \mathrm{C}_2^4\cdot\mathrm{P}_3 = \tfrac{4!}{2!2!}\cdot 3! = 36,$$
$$k_4 = \mathrm{C}_3^4\cdot\mathrm{P}_4 = \tfrac{4!}{3!1!}\cdot 4! = 96,\qquad k_5 = \mathrm{C}_4^4\cdot\mathrm{P}_5 = \tfrac{4!}{4!0!}\cdot 5! = 120.$$

Dakle, može se napisati $1+8+36+96+120 = 161$ reč.

(b) Prvi način: analogno kao pod (a), osim što nakon izbora slova od tih slova ne pravimo proizvoljan niz, već slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a ostala raspoređujemo u niz na proizvoljan način, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = \mathrm{C}_{\mathrm{i}-1}^4\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{i}-1}$, $i\in\{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{C}_1^4\cdot\mathrm{P}_1 = \tfrac{4!}{1!3!}\cdot 1! = 4,\qquad k_3 = \mathrm{C}_2^4\cdot\mathrm{P}_2 = \tfrac{4!}{2!2!}\cdot 2! = 12,$$
$$k_4 = \mathrm{C}_3^4\cdot\mathrm{P}_3 = \tfrac{4!}{3!1!}\cdot 3! = 24,\qquad k_5 = \mathrm{C}_4^4\cdot\mathrm{P}_4 = \tfrac{4!}{4!0!}\cdot 4! = 24.$$

Dakle, može se napisati $1+4+12+24+24 = 65$ reči.

Drugi način: pri pravljenju reči od i slova, slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a zatim pravimo niz od $i-1$ slova od elemenata skupa $\{b,c,d,e\}$, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = \mathrm{V}_{\mathrm{i}-1}^4$, $i\in\{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{V}_1^4 = 4,\qquad k_3 = \mathrm{V}_2^4 = 4\cdot 3 = 12,$$
$$k_4 = \mathrm{V}_3^4 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24,\qquad k_5 = \mathrm{V}_4^4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24.$$

Dakle, može se napisati $1+4+12+24+24 = 65$ reči.

Na stolu se nalazi n kuglica od kojih su dvije obilježene A i B.

1° Na koliko se načina mogu poredati te kuglice tako da obilježene kuglice A i B budu jedna do druge ?

2° Na koliko se načina mogu one poredati da A i B ne budu jedna pored druge ?

RJEŠENJE:

Razlikovaćemo dva slučaja: kuglice su različite i kuglice su jednake među sobom, izuzev označenih kuglica A i B.

a) Pretpostavimo da su kuglice različite među sobom.

1° Ako su kuglice A i B jedna pored druge, možemo ih vezati i posmatrati kao jedan element, pa zajedno sa preostalih $n-2$ kuglica čine niz od $n-1$ različitih elemenata. Njihov razmještaj možemo povezati sa permutacijama bez ponavljanja čiji je ukupan broj jednak:

$$n_1 = P^{n-1} = (n-1)!.$$

Ako su A i B jedna pored druge, onda su i B i A jedna pored druge, pa je ukupan broj različitih razmještaja tih n kuglica tako da su obilježene kuglice jedna pored druge jednak:

$$2 \cdot n_1 = 2 \cdot (n-1)!.$$

2° Ako kuglice A i B nisu jedna pored druge, onda ćemo od ukupnog broja razmještaja svih n različitih kuglica, što predstavlja broj permutacija od n elemenata bez ponavljanja, oduzeti broj permutacija kad su one jedna pored druge, pa je:

$$n_2 = n! - 2 \cdot n_1 = n! - 2 \cdot (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-2).$$

b) Pretpostavimo da su neoznačene kuglice jednake među sobom.

1° Svaki razmještaj ovih n kuglica predstavlja permutaciju sa ponavljanjem. Ako su A i B jedna pored druge, onda je ukupan broj različitih razmještaja jednak:

$$n_3 = 2 \cdot \overline{P}_{n-2}^{n-1} = 2 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 2 \cdot (n-1).$$

2° Ako A i B nisu jedna pored druge, onda je broj različitih razmještaja jednak:

$$n_4 = \overline{P}_{n-2}^{n} - n_3 = \frac{n!}{(n-2)!} - 2 \cdot (n-1) = n \cdot (n-1) - 2 \cdot (n-1) = (n-1) \cdot (n-2).$$

Desetak zadataka koji slijede su posuđeni iz knjige:
“Vjerovatnoća i matematička statistika”, Tomka Subašić, Zenica, 2007

Koja je po redu permutacija STUDENT u leksikografskom (abecednom) poretku načinjena od elemenata $\{D, E, N, S, T, T, U\}$?

RJEŠENJE:

Označimo sa $p_n = STUDENT$ $n-$ tu permutaciju elemenata $\{D, E, N, S, T, T, U\}$. Treba odrediti n. Tada je prva permutacija $p_1 = DENSTTU$.

Da bi slovo S došlo na prvu poziciju, treba da zamijeni mjesta sa tri slova koja su ispred njega u prvoj permutaciji. Pri tome ostalih 6 slova, od kojih su dva ista, mogu se permutovati, pa je ukupan broj razmještaja da se dobije permutacija $p_{n_1} = S(DENTTU)$ jednak:

$$n_1 = 3 \cdot \overline{P}_2^6 + 1 = 3 \cdot \frac{6!}{2!} + 1 = 1081.$$

Da bi slovo T došlo na drugu poziciju, treba da zamijeni mjesta sa tri slova koja su ispred njega u 1081. permutaciji. Pri tome ostalih 5 slova mogu se permutovati, pa je ukupan broj razmještaja da se dobije permutacija $p_{n_2} = ST(DENTU)$ jednak:

$$n_2 = 3 \cdot P^5 + 1081 = 3 \cdot 5! + 1081 = 360 + 1081 = 1441.$$

Da bi slovo U došlo na treću poziciju, treba da zamijeni mjesta sa 4 slova koja su ispred njega u prethodnoj permutaciji i da se pri tome ostala 4 slova mogu permutovati. Ukupan broj razmještaja da se dobije permutacija $p_{n_3} = STU(DENT)$ je:

$$n_3 = 4 \cdot P^4 + n_2 = 4 \cdot 4! + 1441 = 96 + 1441 = 1537.$$

Slovo D u prethodnoj permutaciji se nalazi na 4. poziciji kao i u datoj riječi, pa ne mijenja mjesta sa slovima ispred njega, a preostala 3 slova se permutuju, pa je $p_{n_4} = STUD(ENT)$:

$$n_4 = 0 \cdot 3! + n_3 = 1537.$$

Isto tako i slova E, a zatim i N i T ne mijenjaju mjesta sa slovima ispred njih. pa je:

$$p_{n_5} = STUDE(NT) \Rightarrow n_5 = 0 \cdot 2! + n_4 = 1537.$$

$$p_{n_6} = STUDEN(T) \Rightarrow n_6 = 0 \cdot 1! + n_5 = 1537.$$

$$p_n = STUDENT \Rightarrow n = 0 \cdot 0! + n_6 = 1537.$$

Permutacija p_n je tražena riječ i ona je 1537. permutacija po redu, tj.

$$p_{1537} = STUDENT.$$

Na koliko se načina može rasporediti n bijelih i n crnih kuglica numerisanih brojevima $1, 2, ..., n$, ali tako da dvije kuglice iste boje ne budu jedna pored druge ?

RJEŠENJE:

Obzirom na to da su kuglice numerisane, smatraćemo da su različite među sobom. Broj razmještaja n bijelih kuglica jednak je broju permutacija od n elemenata bez ponavljanja tj. $n!$. Isto tako se n crnih kuglica može poredati na $n!$ načina. Ako svaki razmještaj bijelih kuglica kombinujemo sa svakim razmještajem crnih kuglica tako da crne kuglice umetnemo između bijelih, dobićemo razmještaje u kojima neće biti dvije kuglice iste boje jedna do druge i koji će biti različiti među sobom. Takvih razmještaja biće:

$$m_1 = (n!)\cdot(n!) = (n!)^2.$$

Kako razmještaj možemo početi sa bijelom a završiti sa crnom kuglicom i obrnuto, početi sa crnom a završiti sa bijelom kuglicom, ukupno će biti različitih razmještaja:

$$2\cdot m_1 = 2\cdot(n!)^2.$$

Jedan rukovodilac ima 7 direktno potčinjenih radnika. Koliko on može formirati različitih sastanaka

a) od po 5 članova kolektiva;

b) i po broju i po sastavu prisutnih ?

RJEŠENJE:

a) Kako redosljed nije bitan, broj različitih sastanaka od po 5 članova kolektiva je:

$$n = C_5^7 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21.$$

b) Rukovodilac može održati sastanak sa po 1 članom, sa po 2 člana, sa po 3 člana,..., sa svim članovima kolektiva, pa je broj različitih sastanaka i po broju i po sastavu prisutnih jednak:

$$n = C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7 = \sum_{k=1}^{7}\binom{7}{k} = 2^7 - \binom{7}{0} = 127.$$

U lotu od 50 šina nalazi se 40 dobrih i 10 loših.

a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šina?

b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šina od kojih su 2 loše?

RJEŠENJE:

Kad se uzima uzorak redosljed nije bitan, pa ćemo koristiti kombinacije bez ponavljanja za određivanje broja mogućih uzoraka.

a) Kako je broj šina $n = 50$, a broj šina u uzorku $r = 5$, broj različitih mogućih uzoraka računamo pomoću broja kombinacija pedesetog reda, pete klase, bez ponavljanja, tj.

$$n_1 = C_5^{50} = \binom{50}{5} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{5!} = 2\,118\,760.$$

b) Ako iz skupa od 40 dobrih šina formiramo uzorke od po 3 šine, a iz skupa od 10 loših šina, formiramo uzorke sa po 2 šine, pa svaki uzorak iz prvog skupa udružimo sa svakim uzorkom iz drugog skupa, dobićemo uzorke sa 5 šina, od kojih su 2 šine loše. Broj takvih uzoraka je:

$$n_2 = C_3^{40}\times C_2^{10} = \binom{40}{3}\times\binom{10}{2} = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{3!}\cdot\frac{10\cdot 9}{2!} = 444\,600.$$

Pravougaonik je ispresijecan pravama paralelnim njegovim stranicama. Ako je broj pravih paralelnih jednoj njegovoj stranici m, a paralelnih drugoj stranici n, naći broj tako nastalih pravougaonika. (Primijeniti za specijalni slučaj $m = 3$ i $n = 4$).

RJEŠENJE:

Ako je broj pravih koje su paralelne jednoj stranici pravougaonika m, tada je, zajedno sa stranicama, broj pravih paralelnih međusobno $m+2$. Svake dvije od tih pravih, zajedno sa druge dvije stranice pravougaonika, obrazuju novi pravougaonik, pa se njihov broj računa pomoću kombinacija bez ponavljanja, jer redosljed nije bitan, i on je jednak:

$$n_1 = C_2^{m+2} = \binom{m+2}{2} = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2!} = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2}.$$

Ako imamo n pravih paralelnih drugim dvjema stranicama i na isti način presijecamo dati pravougaonik, broj pravougaonika će biti:

$$n_2 = C_2^{n+2} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}.$$

Presiječemo li dati pravougaonik u isto vrijeme sa m pravih paralelnih jednoj stranici i n pravih paralelnih drugoj stranici, broj nastalih pravougaonika je:

$$n_3 = n_1\cdot n_2 = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}.$$

U specijalnom slučaju je:

$$n_3 = n_1\cdot n_2 = \frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2} = 150.$$

Sprovedena je anketa. Anketirana su 2 muškarca i 2 žene. U prostoriji je bilo 36 ljudi i to 19 muškaraca i 17 žena. Na koliko različitih načina su anketari mogli odabrati 4 anketirane osobe ?

RJEŠENJE:

Kako redoslјed nije bitan, broj različitih odabira anketiranih odredićemo pomoću kombinacija bez ponavljanja. Ako se iz skupa od 19 muškaraca uzimaju na slučaj po 2, tada je broj različitih izbora jednak:

$$n_1 = C_2^{19} = \binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2!} = 171.$$

Isto tako je, ako se iz skupa od 17 žena uzima na slučaj po 2 žene, broj različitih izbora je

$$n_2 = C_2^{17} = \binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2!} = 136.$$

Ako svaki izbor iz prvog skupa udružimo sa svakim izborom iz drugog skupa dobićemo po 4 anketirana od kojih su 2 muškarca i 2 žene. Broj takvih četvorki je:

$$n = n_1 \cdot n_2 = 171 \cdot 136 = 23256.$$

Anketari su mogli odabrati na 23256 različitih načina 4 anketirana iz datog skupa ljudi.

Koliko ima različitih voznih karata za putovanje jednom željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica?

RJEŠENJE:

Broj različitih voznih karata ćemo odrediti pomoću varijacija bez ponavljanja, jer je redoslјed bitan u izdavanju karata (od stanice A do stanice B i od stanice B do stanice A nije isto), zatim karta se izdaje između dvije različite stanice. Prema tome je:

$$n = V_2^{77} = 77 \cdot 76 = 5852 .$$

Dakle, može se izdati 5852 različite vozne karte za putovanje željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica.

Koliko ima različitih voznih karata za putovanje jednom željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica?

RJEŠENJE:

Broj različitih voznih karata ćemo odrediti pomoću varijacija bez ponavljanja, jer je redoslјed bitan u izdavanju karata (od stanice A do stanice B i od stanice B do stanice A nije isto), zatim karta se izdaje između dvije različite stanice. Prema tome je:

$$n = V_2^{77} = 77 \cdot 76 = 5852 .$$

Dakle, može se izdati 5852 različite vozne karte za putovanje željezničkom prugom na kojoj ima 77 stanica.

Koliko ima stanica na željezničkoj pruzi, ako za razna putovanja tom prugom postoji 702 različite vozne karte?

RJEŠENJE:

Obzirom na to da se izdaju karte između dvije različite stanice, da karta od stanice A do stanice B nije ista kao karta od stanice B do stanice A, broj različitih karata ćemo računati pomoću broja varijacija bez ponavljanja n-te klase drugog reda, gdje je n broj stanica koji je nepoznat.

$$V_2^n = n \cdot (n-1) = 702 \Rightarrow n^2 - n - 702 = 0 \wedge n \in N \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 702}}{2} = \frac{1 \pm 53}{2};$$

$n_1 = 27, n_2 = -26.$ Zbog $n \in N$, slijedi da $n_2 = -26 \notin N$,

pa je broj stanica na toj pruzi $n = 27$.

Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego **da se koncentrišu na** njihova **rješenje** (kao i da **postavljaju pitanja** kako u vezi postavke zadataka tako i za rješenja). Često samim pisanjem postavke zadatka dovodi do zamora i gubitka koncentracije studenta. Neki zadaci sa papira će namjerno biti ostavljeni studentima za vježbu – pripremiti jednu oblast iz Matematike za ispit nije moguće ako samostalno ne uradite određen broj primjera. **Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi** iz predmeta „Inžinjerska matematika III", koju možete skinuti sa stranice *http://ff.unze.ba/nabokov/*. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Jedna od poznatih latinskih izreka je: **Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.**

Uvod u Teoriju vjerovatnoće

1. Prostor uzoraka i događaja

1. Odrediti prostor uzoraka u sljedećim eksperimentima:
(a) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) novčića;
(b) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) kocke;
(c) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) dva novčića;
(d) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) dvije kocke;
(e) Eksperiment koji se sastoji od mjerenja životnog vijeka nekog auta.

2. Posmatrajmo eksperimente (a), (b), (c), (d) i (e) iz prethodnog zadatka. Navesti po jedan ili dva primjera događaja iz svakog od ovog eksperimenta.

3. Pomoću Venne-ovog dijagrama predstaviti događaje $A\cup B$, $A\cap B$, A i B kao disjunktne događaje, i A^C.

4. (a) Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića u kome je prostor uzoraka $S=\{P,G\}$. Ako su dati događaji $E=\{P\}$, $F=\{G\}$ odrediti $E\cup F$, EF, E^C, F^C i S^C.
(b) Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice u kome je prostor uzoraka $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Ako su dati događaji $E=\{1,3,5\}$ i $S=\{1,2,3\}$ odrediti $E\cup F$, EF, E^C, F^C i S^C.
(c) Posmatrajmo eksperiment u kome se bacaju dvije kockice (u kome se prostor uzoraka sastoji od 36 tački). Ako je dat događaj $E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ odrediti E^C i S^C.

5. Odrediti prostor uzoraka sljedećim eksperimentima.
(a) Eksperiment čiji je izlaz spol djeteta;
(b) Eksperiment čiji je izlaz poredak završene utrke između 7 trkačih konja sa pozicijama 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7;
Za iste eksperimente navesti primjer događaja.

2. Vjerovatnoće definisane na događajima

6. Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića. Ako pretpostavimo da je pojava glave jednaka pojavi pisma odrediti vjerovatnoće događaja. Odrediti i vjerovatnoće događaja pod pretpostavkom da je pojava glave dva puta vjerovatnija od pojave pisma.

7. Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice, i pretpostavimo da svih šest brojeva imaju jednaku mogućnost pojavljivanja. Odrediti $P(\{1\})$, $P(\{2\})$, $P(\{3\})$, ..., $P(\{6\})$ i $P(\{2,4,6\})$.

8. Posmatrajmo eksperiment bacanja dva obična novčića. Ako su dati događaji

$$E=\{(G,G),(G,P)\} \text{ i } F=\{(G,G),(P,G)\}$$

(tj. E je događaj da se na prvom novčiću pokaže glava, a F je događaj da se na drugom novčiću pokaže glava), izračunati $P(E\cup F)$.

9. Kutija sadrži tri kuglice: jednu crvenu, jednu zelenu i jednu plave boje. Posmatrajmo eksperiment koji se sastoji od uzimanja jedne kuglice iz kutije, pa uzimanja druge kuglice iz kutije. Šta je prostor uzoraka? Ako, u svakom trenutku, svaka kuglica iz kutije ima jednaku mogućnost da bude izabrana, kolika je vjerovatnoća svake tačke iz prostora uzoraka.

10. U nekoj sportskoj kladionici postoji igra utrka cuka, u kome se šest cuka takmiče u trčanju do cilja. Neki čovjek koristi sljedeći sistem klađenja na cuke. On ulaže 1 KM na cuku sa crvenom bojom. Ako taj cuko pobjedi on završava sa klađenjem. Ako izgubi on drugi put ulaže 2 KM na istog cuku i bez obzira na ishod on završava sa klađenjem. Pretpostavljajući da je vjerovatnoća svake opklade $\frac{1}{2}$, izračunati kolika je vjerovatnoća da čovjek ode kući kao pobjednik? Zašto ovaj sistem klađenja ne koristi niko?

11. U nekom eksperimentu događaj A nastupa sa vjerovatnoćom $P(A)=\frac{1}{3}$. Koliko pokusa treba napraviti da bismo s vjerovatnoćom $0{,}99$ mogli očekivati bar jedno pojavljivanje događaja A.

12. Kažemo da je $E\subseteq F$ ako je svaka tačka iz E također u F. Pokazati da ako je $E\subseteq F$ tada je

$$P(F)=P(E)+P(FE^C)\ge P(E)$$

3. Uslovna vjerovatnoća

13. Posmatrajmo eksperiment u kome bacamo dvije kockice jednu iza druge. Nakon bacanja smo primjetili da je prva kockica 4. Kolika je vjerovatnoća da suma dvije kockice bude jednako 6?

14. Pretpostavimo da se u šeširu nalaze karte sa brojevima od jedan do deset, da su izmiješane i da izvlačimo jednu kartu. Ako znamo da je broj na izvučenoj karti najmanje pet, izračunati kolika je uslovna vjerovatnoća da je broj na karti 10?

15. Neka familija ima dvoje djece. Kolika je uslovna vjerovatnoća da su oba djeteta dječaci, ako nam je dato da je najmanje jedno dijete dječak.

16. Suljo kao izborni predmet može da izabere kurs iz informatike ili iz hemije. Ako Suljo izabere kurs iz informatike, tada vjerovatnoća da predmet položi sa desetkom u indeksu iznosi $\frac{1}{2}$; a ako izabere kurs iz hemije vjerovatnoća da dobije desetku iznosi $\frac{1}{3}$. On je odlučio da ovu važnu odluku donese bacanjem običnog novčića. Kolika je vjerovatnoća da Suljo dobije desetku iz hemije.

17. Pretpostavimo da kutija sadrži sedam crnih kuglica i pet bijelih kuglica. Dvije kuglice izvlačimo iz kutije bez njihovog vraćanja nazad. Ako pretpostavimo da svaka kuglica u kutiji ima jednaku vjerovatnoću da bude izvučena, izračunati vjerovatnoću da obe izvučene kuglice budu crne.

18. Pretpostavimo da su neka tri čovjeka na zabavi bacili svoj šešir u centar sobe. Šeširi su se prvo izmiješali a onda je svaki čovjek na slučajan način izabrao šešir. Kolika je vjerovatnoća da ni jedan od tri čovjeka nisu izabrala svoj vlastiti šešir?

Prostor događaja

Neka je Ω skup, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je **σ-polje** nad Ω, odnosno, uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ je **prostor događaja** ukoliko važi:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$, (2) ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je i $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

U tom slučaju, elementi familije $\mathcal{F}$ su **događaji**, skupove $\emptyset$ i Ω interpretiramo redom kao **nemoguć događaj** i **siguran događaj**, a za događaj $A \in \mathcal{F}$, njemu odgovarajući komplement $\overline{A} \in \mathcal{F}$ interpretiramo kao **suprotan događaj događaja** A. Elemente ω skupa Ω nazivamo **elementarnim događajima**.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor događaja, i neka su $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F}$ neki događaji. U teoriji verovatnoće je uobičajeno da se umesto oznake $A \cap B$ koristi oznaka $A \cdot B$ ili jednostavno AB, a za disjunktne događaje A i B ($A \cap B = \emptyset$) se umesto $A \cup B$ koristi oznaka $A + B$ čime se u samom zapisu naglašava da se radi o disjunktnim događajima. Pri tome operacije sa skupovima (događajima) interpretiramo na sledeći način:

AB - „**realizovala su se oba događaja** A **i** B”,
$A \cup B$ - „**realizovao se bar jedan od događaja** A **i** B”,
$A + B$ - „**realizovao se bar jedan od disjunktnih događaja** A **i** B” (radi o disjunktnim događajima, zato $A + B$ tačnije interpretiramo sa „**realizovao se tačno jedan od disjunktnih događaja** A **i** B”),
$\overline{A}$ - „**realizovao se suprotan događaj događaja** A”.

Prostor događaja $(\Omega, \mathcal{F})$ ima još i sledeće važne osobine:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(2) ako je $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,

(4) ako je $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

---

[22] *Eksperiment se sastoji od jednog bacanja kockice za igru. Posmatrajmo događaje:*

A - *„pri bacanju je dobijen paran broj”,*
B - *„pri bacanju je dobijen neparan broj”,*
C - *„pri bacanju je dobijen broj manji od 3”.*

(a) *Napisati skup elementarnih događaja (ishoda eksperimenta)* Ω.

(b) *Napisati događaje* A, B *i* C *kao skupove elementarnih događaja.*

(c) *Koji su parovi događaja* A, B, C *disjunktni (nesaglasni, isključivi)?*

Rešenje:

(a) Označimo sa $\{\omega_i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ događaj „*pri bacanju je dobijen broj* i”. Tada je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

(b) $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_1, \omega_2\}$.

(c) Disjunktni su samo događaji A i B ($A \cap B = \emptyset$).

Uvod u Teoriju vjerovatnoće

1. Prostor uzoraka i događaja

Pretpostavimo da želimo izvršiti eksperiment čiji ishod nije moguće predvidjeti. Bez obzira, dok ishod eksperimenta ne može biti poznat unaprijed, pretpostavimo da je skup svih mogućih ishoda poznat. Ovaj skup svih mogućih ishoda eksperimenta je poznat kao prostor uzoraka eksperimenta i označava se sa S.

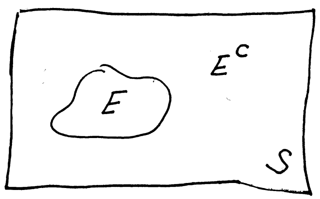
Bilo koji podskup E prostora uzoraka S je poznat kao događaj.

Za bilo koja dva događaja E i F prostora uzoraka S definišemo novi događaj $E \cup F$ koji sadrži sve izlaze koji su ili u E ili u F ili u oba (i u E i u F). Tj. događaj $E \cup F$ će se pojaviti ako se bar jedan ili E ili F pojavi. $E \cup F$ označava uniju događaja E i događaja F

Za bilo koja dva događaja E i F također možemo definisati novi događaj EF, koji se ponekad piše kao $E \cap F$, i naziva presjek događaja E i F. Ovaj događaj je definisan na sljedeći način: EF sadrži sve izlaze koji su u oba događaja, i u E i u F. Tj. događaj EF će se pojaviti samo ako se oba i E i F pojave.

Null događaj označavamo sa $\emptyset$ i tumačimo kao događaj koji ne sadrži ni jedan izlaz.

Na kraju, za bilo koji događaj E definišemo novi događaj E^c, koji nazivamo komplement od E, i definišemo da se sastoji od svih izlaza iz prostora uzoraka S koji nisu u E. Tj., E^c će se pojaviti ako i samo ako se ne pojavi E.



(#) Odrediti prostor uzoraka u sljedećim eksperimentima:

(a) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) novčića;

(b) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) kocke;

(c) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (okretanja) dva novčića;

(d) Eksperiment koji se sastoji od bacanja (kotrljanja) dvije kocke;

(e) Eksperiment koji se sastoji od mjerenja životnog vijeka nekog auta.

Rj.

(a) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji od bacanja novčića je

$$S = \{G, P\}$$

gdje G znači da je rezultat bacanja glava, a P znači da je rezultat bacanja pismo.

(b) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji od bacanja kockice je

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

gdje izlaz i znači da je se i pojavila na kockici, $i = 1,2,3,4,5,6$.

(c) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji u bacanju dva novčića su sljedeće četri tačke

$$S = \{(G,G), (G,P), (P,G), (P,P)\}.$$

Izlaz će biti (G, G) ako su oba novčića pokazala glavu; izlaz je (G, P) ako je prvi novčić pokazao glavu, a drugi pismo; dok je rezultat (P, G) ako je prvi pokazao pismo a drugi glavu; i na kraju biće (P, P) ako su oba novčića pokazala pismo.

(d) Prostor uzoraka u bacanju dvije kockice se sastoji od sljedećih 36 tačke

$$S = \left\{\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix}\right\},$$

gdje je izlaz (i,j) ako je na prvoj kocki pokazano i, a na drugoj kocki j.

(e) Prostor uzoraka u eksperimentu koji se sastoji u mjerenju životnog vijeka nekog auta su svi nenegativni realni brojevi. Tj.

$$S = [0, \infty) .$$

Posmatrajmo eksperimente (a), (b), (c), (d) i (e) iz prethodnog zadatka. Navesti po jedan ili dva primjera događaja iz svakog od ovog eksperimenta.

Rj.

(a') U primjeru (a), ako je $E = \{G\}$, tada je E događaj u kome se glava pojavila prilikom bacanja novčića. Slično, ako je $E = \{P\}$, tada će E biti događaj u kome se pojavilo pismo.

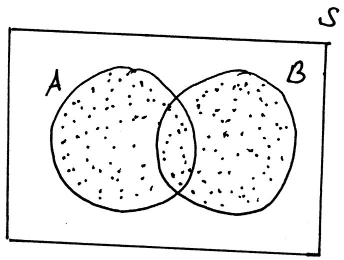
(b') U primjeru pod (b), ako je $E = \{1\}$ tada je E događaj da se jedinica pojavi prilikom bacanja kockice. Ako je $E = \{2, 4, 6\}$ tada će E biti događaj da se paran broj pojavi prilikom bacanja kockice.

(c') U primjeru pod (c), ako je $E = \{(G,G), (G,P)\}$, tada je E događaj da se pojavi glava na prvom novčiću.

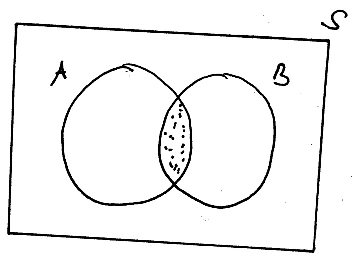
(d') U primjeru pod (d), ako je $E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, tada je E događaj da je suma kocki jednaka sedam.

(e') U primjeru pod (e), ako je $E = (2,6)$ tada je E događaj da će auto trajati između dvije i šest godina.

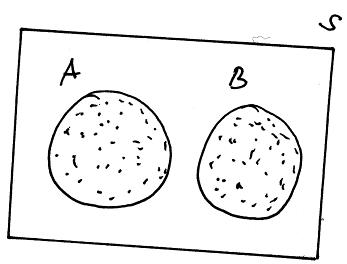
Grafičko predstavljanje događaja je vrlo korisno pomoću Venne-ovog dijagrama



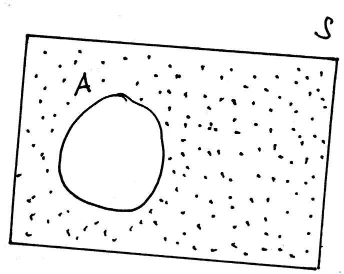
Venneov dijagram: tačkasti dio je $A \cup B$



Istačkani dio je $A \cap B$



A i B su disjunktni događaji



Istačkani dio je A^c

#

(a) Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića u kome je prostor uzoraka $S=\{P,G\}$. Ako su dati događaji $E=\{P\}$, $F=\{G\}$ odrediti $E\cup F$, EF, E^c, F^c, S^c.

(b) Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice u kome je prostor uzoraka $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Ako su dati događaji $E=\{1,3,5\}$ i $F=\{1,2,3\}$ odrediti $E\cup F$, EF, E^c, F^c, S^c.

(c) Posmatrajmo eksperiment u kome se bacaju dvije kockice (u kome se prostor uzoraka sastoji od 36 tački). Ako je dat događaj $E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ odrediti E^c i S^c.

Rj.

(a) $E\cup F=\{G,P\}$, $EF=\phi$, $E^c=F=\{G\}$, $F^c=E=\{P\}$, $S^c=\phi$

(b) $E\cup F=\{1,2,3,5\}$, $EF=\{1,3\}$, $E^c=\{2,4,6\}$, $F^c=\{4,5,6\}$, $S^c=\phi$

(c) E^c je događaj u kome suma dvije kockice nije jednaka sedam

$S^c=\phi$

(#) Odrediti prostor uzoraka u sljedećim eksperimentima
(a) Eksperiment čiji je izlaz spol djeteta.
(b) Eksperiment čiji je izlaz poredak završene utrke između 7 trkačih konja sa pozicijama 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.
Za iste eksperimente navesti primjer događaja.

Rj.
(a) Prostor uzoraka je $S = \{$dječak, djevojčica$\}$.
Ako je $A = \{$djevojčica$\}$ tada je A događaj da je dijete djevojčica. Ako je $B = \{$dječak$\}$, tada je B događaj da je dijete dječak.

(b) Prostor uzoraka je $S = \{$sve permutacije 7-orke $(1,2,3,4,5,6,7)\}$.
Izlaz $(4, 1, 6, 7, 5, 3, 2)$ znači, na primjer, da je konj sa brojem 4 završio prvi, konj sa brojem 1 drugi, i tako dalje.
Ako sa A označimo

$$A = \{\text{svi izlazi iz } S \text{ koji počinju sa } 2\}$$

to znači da je A događaj da je konj sa brojem 2 pobijedio na utrci.

Neki zadaci koji slijede u ovoj lekciji i u dvije sljedeće lekcije, čiji su numeracija [23]-[30], [32]-[33] i [34]-[42] su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

[23] *Navesti skup elementarnih ishoda za sledeće eksperimente:*

(a) *bacanje jednog novčića,* (b) *bacanje jednog zlatnog i jednog srebrnog novčića,*

(c) *bacanje jednog zlatnog, jednog srebrnog i jednog bronzanog novčića,*

(d) *bacanje kockice za igru i jednog novčića,* (e) *bacanje dva puta kockice za igru,*

(f) *izvlačenje jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice,*

(g) *izvlačenje dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice, pri čemu je bitan redosled izvučenih kuglica,*

(h) *izvlačenje dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice, pri čemu* nije *bitan redosled izvučenih kuglica,*

(i) *registrovanje ispravnosti jedne sijalice,* (j) *registrovanje ispravnosti tri sijalice.*

Rešenje:

(a) $\Omega = \{\omega_G, \omega_P\}$, gde je G događaj „*pri bacanju je pao grb*", a P je događaj „*pri bacanju je palo pismo*".

(b) $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{GP}, \omega_{PG}, \omega_{PP}\}$, gde je ω_{XY} događaj „*pri bacanju zlatnog novčića je palo* $X \in \{G, P\}$*, a pri bacanju srebrnog* $Y \in \{G, P\}$", gde je sa G skraćeno označen *grb* a sa P *pismo*; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^2 = 4$.

(c) $\Omega = \{\omega_{PPP}, \omega_{PPG}, \omega_{PGP}, \omega_{PGG}, \omega_{GPP}, \omega_{GPG}, \omega_{GGP}, \omega_{GGG}, \}$, uz analogne oznake kao pod (b); primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_3^2 = 8$.

(d) $\Omega = \{\omega_{1P}, \omega_{1G}, \omega_{2P}, \omega_{2G}, \omega_{3P}, \omega_{3G}, \omega_{4P}, \omega_{4G}, \omega_{5P}, \omega_{5G}, \omega_{6P}, \omega_{6G}\}$, gde brojevi u indeksu predstavljaju broj dobijen na kockici, a slova predstavljaju odgovarajuću stranu novčića.

(e) $\Omega = \{\omega_{ij} \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$, gde je ω_{ij} događaj „*pri prvom po redu bacanju je pao broj* i *a pri drugom po redu broj* j"; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 36$.

(f) $\Omega = \{\omega_b, \omega_c, \omega_p\}$, gde je ω_x događaj „*izvučena je kuglica boje* $x \in \{b, c, p\}$" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje.

(g) $\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{cb}, \omega_{cc}, \omega_{cp}, \omega_{pb}, \omega_{pc}, \omega_{pp}\}$, gde je ω_{xy} događaj „*prvo je izvučena kuglica boje* $x \in \{b, c, p\}$ *a zatim kuglica boje* $y \in \{b, c, p\}$" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^3 = 9$.

(h) $\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{cc}, \omega_{cp}, \omega_{pp}\}$, gde je ω_{xy} događaj „*izvučena je jedna kuglica boje* $x \in \{b, c, p\}$ *i još jedna kuglica boje* $y \in \{b, c, p\}$" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{C}}_2^3 = 6$.

(i) $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, gde je ω_0 događaj „*sijalica je neispravna*" a ω_1 događaj „*sijalica je ispravna*".

(j) $\Omega = \{\omega_{000}, \omega_{001}, \omega_{010}, \omega_{011}, \omega_{100}, \omega_{101}, \omega_{110}, \omega_{111}\}$, gde je ω_{ijk} događaj „*prva sijalica je u stanju* i*, druga u stanju* j*, a treća u stanju* k*,* $i, j, k \in \{0, 1\}$" pri čemu stanje 0 znači da je odgovarajuća sijalica *neispravna*, a stanje 1 da je *ispravna*.

[24] *Radnik je proizveo* 3 *artikla. Neka je* X_i*,* $i \in \{1, 2, 3\}$ *događaj „*i*-ti prozvedeni artikal je ispravan" (artikle razlikujemo po tome kojim redom su proizvedeni). Pomoću događaja* X_i *i* $\overline{X}_i$ *izraziti skup elementarnih ishoda kao i događaje*

A - *„svi artikli su ispravni",*
B - *„bar jedan artikal je neispravan",*
C - *„tačno jedan artikal je ispravan",*
D - *„najviše dva artikla su ispravna",*
E - *„bar dva artikla su ispravna",*
F - *„tačno dva artikla su neispravna".*

Rešenje:

$\Omega = \{X_1X_2X_3, X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, X_1\overline{X}_2\overline{X}_3,$
$\overline{X}_1X_2X_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\},$

$A = \{X_1X_2X_3\},$

$B = \overline{A} = \{X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1X_2X_3, X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\},$

$C = \{X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3\},$

$D = B,$

$E = \{X_1X_2X_3, X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1X_2X_3\},$

$F = C.$

[25] *Meta se gađa sa* 3 *metka. Neka je* S_i*,* $i \in \{1, 2, 3\}$ *događaj „*i*-tim metkom je meta pogođena". Preko događaja* S_i *izraziti događaje*

A - *„ostvarena su* 3 *pogotka",*
B - *„ostvarena su* 3 *promašaja",*
C - *„ostvaren je bar* 1 *pogodak",*
D - *„ostvaren je bar* 1 *promašaj",*
E - *„ostvarena su bar* 2 *pogotka",*
F - *„ostvaren je najviše* 1 *pogodak".*

Rešenje:

$A = S_1S_2S_3,$

$B = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3,$

$C = \overline{B} = \{S_1S_2S_3, S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2S_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\},$

$D = \overline{A} = \{S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2S_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\},$

$E = \{S_1S_2S_3, S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1S_2S_3\},$

$F = \overline{E} = \{S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\},$

[30] *Brod ima jedno kormilo, tri kotla i dve turbine. Neka* A *događaj „kormilo je ispravno", neka su* B_i*,* $i \in \{1, 2, 3\}$ *događaji „*i*-ti kotao je ispravan", i neka su* C_i*,* $i \in \{1, 2\}$ *događaji „*i*-ta turbina je ispravna". Brod može da se kreće ako je ispravno kormilo, bar jedan kotao i bar jedna turbina. Preko navedenih događaja, izraziti događaj* X*: „brod može da se kreće".*

Rešenje: Označimo sa B događaj „*bar jedan kotao je ispravan*", a sa C događaj „*bar jedna turbina je ispravna*". Tada je

$$X = ABC$$

gde je $B = \overline{\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ i $C = \overline{\overline{C}_1\overline{C}_2} = C_1 \cup C_2$.

[26] *Iz skupa* $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *se na slučajan način bira jedan broj, i neka je* $\Omega = X$ *skup elementarnih događaja tako da je* $i \in \Omega$ *događaj „iz skupa* X *je izabran broj* i*”. Za događaje*

A	-	*„izabrani broj je manji od 7”,*	C	-	*„izabrani broj je paran”,*
B	-	*„izabrani broj je veći ili jednak sa 6”,*	D	-	*„izabrani broj je neparan”,*

navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje, i rečima opisati događaje AB, $A(B\cup D)$, $\overline{A}B$, $\overline{A}C$, $\overline{A\cup D}$, $\overline{A\cup B\cup C}$, ABC *i* $ABCD$.

Rešenje: Iz $A = \{2,3,4,5,6\}$, $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$, $C = \{2,4,6,8,10,12\}$, $D = \{3,5,7,9,11\}$ sledi

$AB = \{6\}$ je događaj „*izabrani broj je* 6” (ili jednostavno „*izabrani broj je manji od* 7 *i veći ili jednak sa* 6”),

$A(B\cup D) = A\cap\{3,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{3,5,6\}$ je događaj „*izabran je jedan od brojeva* 3, 5, 6”,

$\overline{A}B = \{7,8,9,10,11,12\}\cap B = \{7,8,9,10,11,12\}$ je događaj „*izabrani broj je veći od* 6”,

$\overline{A}C = \{7,8,9,10,11,12\}\cap C = \{8,10,12\}$ je događaj „*izabran je paran broj koji je veći od* 6”,

$\overline{A\cup D} = \overline{\{2,3,4,5,6,7,9,11\}} = \{8,10,12\} = \overline{A}C$ je događaj „*izabran je paran broj koji je veći od* 6”,

$\overline{A\cup B\cup C} = \overline{\Omega} = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (izabrani broj nije manji od 7, i nije manji ili jednak sa 6, i nije paran, što je nemoguće),

$ABC = \{6\}$ je događaj „*izabrani broj je* 6”,

$ABCD = \{6\}\cap D = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (izabrani broj je manji od 7, i veći je ili jednak sa 6, i pri tome je i paran i neparan, što je nemoguće).

---

[27] *Baca se kockica za igru i posmatraju se događaji*

A	-	*„na kockici je pao broj manji od 4”,*
B	-	*„na kockici je pao paran broj”,*
C	-	*„na kockici je pao broj koji nije manji od 5”.*

Navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje i rečima opisati događaje $A\cup B$, $B\cup C$, $B\cap C$, $A\cap C$, $A\cup B\cup C$, $\overline{C}$, $\overline{B}$ *i* $A\cup(B\cap\overline{C})$.

Rešenje: Označimo elementarne događaje, kao u zadatku [26], brojevima koji predstavljaju broj koji je pao na kockici. Dakle, skup svih elementarnih događaja je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, a događaji A, B i C su zapravo skupovi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$ i $C = \{5,6\}$. Sledi

$A\cup B = \{1,2,3,4,6\}$ je događaj „*pao je broj različit od* 5”,

$B\cup C = \{2,4,5,6\}$ je događaj „*pao je broj različit od* 1 *i* 3”,

$B\cap C = \{6\}$ je događaj „*pao je broj* 6”,

$A\cap C = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (pao je broj koji je manji od 4 i veći je ili jednak sa 5, što je nemoguće),

$A\cup B\cup C = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ je *siguran* događaj,

$\overline{C} = \{1,2,3,4\}$ je događaj „*pao je broj manji od* 5”,

$\overline{B} = \{1,3,5\}$ je događaj „*pao je neparan broj*”,

$A\cup(B\cap\overline{C}) = A\cup(\{2,4,6\}\cap\{1,2,3,4\}) = \{1,2,3\}\cup\{2,4\} = \{1,2,3,4\}$.

[28] *Na nekoj raskrsnici se posmatra kretanje automobila* a_1, a_2 *i* a_3 *koji mogu da skreću ili levo ili desno, i sa* A_i, $i\in\{1,2,3\}$ *je označen događaj „automobil* a_i *na raskrsnici skreće desno”. Preko* A_i *izraziti događaje*

X	-	*„sva tri automobila skreću na istu stranu”,*
Y	-	*„više automobila je skrenulo u levu stranu”,*
Z	-	*„ni jedan automobil nije skrenuo na levu stranu”,*
W	-	*„prvi i treći automobil su skrenuli na istu stranu”.*

Rešenje:

$X = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$,

$Y = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}$,

$Z = A_1A_2A_3$,

$W = \{A_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$.

---

[29] *Četiri studenta polažu ispit, i* S_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ *označava događaj „*i*-ti student je položio ispit”,* $i\in\{1,2,3,4\}$. *Napisati skup elementarnih događaja* Ω *i preko događaja* S_i *izraziti događaje*

A	-	*„nijedan student nije položio ispit”,*
B	-	*„položio je samo prvi student”,*
C	-	*„položio je samo jedan student”,*
D	-	*„položio je bar jedan student”,*
E	-	*„položila su tačno dva studenta”,*
F	-	*„položila su najviše dva studenta”,*
G	-	*„položila su najmanje tri studenta”,*
H	-	*„položila su najviše tri studenta”.*

Rešenje: Siguran događaj

$$\begin{aligned}\Omega = \{&S_1S_2S_3S_4, S_1S_2S_3\overline{S}_4, S_1S_2\overline{S}_3S_4, S_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &S_1\overline{S}_2S_3S_4, S_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &\overline{S}_1S_2S_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &\overline{S}_1\overline{S}_2S_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4\}\end{aligned}$$

se sastoji od $\mathrm{V}_4^2 = 16$ elementarnih događaja.

$A = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$B = S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$C = \{S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4\}$,

$D = \Omega\setminus\overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$E = \{S_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3S_4\}$,

$F = A\cup C\cup E$,

$G = \{S_1S_2S_3\overline{S}_4, S_1S_2\overline{S}_3S_4, S_1\overline{S}_2S_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3S_4, S_1S_2S_3S_4\}$,

$H = \Omega\setminus\{S_1S_2S_3S_4\}$.

2. Vjerovatnoće definisane na događajima

Posmatrajmo eksperiment čiji je prostor uzoraka S. Za svaki događaj E prostora uzoraka S, pretpostavimo da je broj $P(E)$ definisan i da zadovoljava sljedeća tri uslova:

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) Za bilo koji niz događaja $E_1, E_2, \ldots$ koji su međusobno isključivi, tj. događaji za koje vrijedi da je $E_n E_m = \emptyset$ za $m \neq n$, tada

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$P(E)$ tumačimo kao vjerovatnoća događaja E.

Verovatnoća događaja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor događaja. **Verovatnoća** na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ za koju važi

(1) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

(2) ako za niz događaja $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ važi da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$, tada je $\mathsf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.

Ako za događaj B važi $\mathsf{P}(B) > 0$, tada se **uslovna verovatnoća** $\mathsf{P}(A|B)$ (događaja A pod uslovom da se ostvario događaj B) definiše sa

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Pri rešavanju zadataka ćemo koristiti sledeće važne osobine verovatnoće

- $$\mathsf{P}(\emptyset) = 0 \tag{1.1}$$
- $$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) \tag{1.2}$$
  $$\mathsf{P}(A|B) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}|B) \tag{1.3}$$
- $$B \subseteq A \Rightarrow \mathsf{P}(B) \leq \mathsf{P}(A) \tag{1.4}$$
- $$B \subseteq A \Rightarrow \mathsf{P}(A \setminus B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) \tag{1.5}$$
- Za svaki konačan skup događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) =$$
  $$= \sum_i \mathsf{P}(S_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(S_i S_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(S_i S_j S_k) + \ldots + (-1)^n \mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) \tag{1.6}$$
  Na primer, za $n = 2$ i $n = 3$ je
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_2) \tag{1.7}$$
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$$
  $$= \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) + \mathsf{P}(S_3) - \mathsf{P}(S_1 S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_3) - \mathsf{P}(S_2 S_3) + \mathsf{P}(S_1 S_2 S_3) \tag{1.8}$$
  a kao jednu od posledica dobijamo i
  $$\mathsf{P}(S_1 S_2) = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) \tag{1.9}$$
- Za svaki konačan skup događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) =$$
  $$= \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2 \overline{S_1}) + \mathsf{P}(S_3 \overline{S_2 S_1}) + \ldots + \mathsf{P}(S_n \overline{S_{n-1} S_{n-2} \ldots S_1}) \tag{1.10}$$
- Ako je $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \ldots$, tada važi
  $$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(S_i) \tag{1.11}$$
- Ako je $S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \ldots$, tada važi
  $$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(S_i) \tag{1.12}$$

- Za svaki konačan skup disjunktnih događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
$$\mathsf{P}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(S_i) \tag{1.13}$$
- Za događaje $S_1, S_2, \ldots, S_n$ koji su nezavisni (u ukupnosti) važi
$$\mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathsf{P}(S_1)\,\mathsf{P}(S_2) \ldots \mathsf{P}(S_n) \tag{1.14}$$
- Za događaje $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi
$$\mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathsf{P}(S_1)\,\mathsf{P}(S_2|S_1)\,\mathsf{P}(S_3|S_1 S_2) \ldots \mathsf{P}(S_n|S_1 S_2 \ldots S_{n-1}) \tag{1.15}$$
ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.
- Događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čine potpun sistem događaja ako važi:
$$\forall i, j,\ i \neq j \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \qquad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \qquad \forall i \quad \mathsf{P}(H_i) > 0.$$
Za potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi
$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = 1.$$
- Za događaj S i potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi **formula totalne verovatnoće**
$$\mathsf{P}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(S|H_i) \tag{1.16}$$
ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.
- Za događaj S i potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi **Bajesova formula**
$$\mathsf{P}(H_k|S) = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(S|H_k)}{\mathsf{P}(S)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(S|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(S|H_i)} \tag{1.17}$$
za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

d određenim uslovima se verovatnoća događaja može izračunavati primenom tzv. plasove ili geometrijske definicije verovatnoće.

- **Laplasova definicija verovatnoće:** ako je zadovoljeno
  1°) skup svih mogućih elementarnih ishoda je konačan - na primer, neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$,
  2°) elementi se biraju na slučajan način, tj. svi elementarni ishodi ω_i su jednakoverovatni ($\mathsf{P}(\{\omega_1\}) = \mathsf{P}(\{\omega_2\}) = \cdots = \mathsf{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$),

  tada je verovatnoća nekog događaja $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega$
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} \tag{1.18}$$
(količnik broja „povoljnih elementarnih ishoda" i „ukupnog broja elementarnih ishoda").

- **Geometrijska definicija verovatnoće:** ako je zadovoljeno
  1°) skup Ω svih mogućih elementarnih ishoda, kao i događaj A čija se verovatnoća izračunava se mogu predstaviti kao merljive geometrijske oblasti - na primer kao duži čije dužine možemo odrediti, ili kao oblasti u ravni čije površine umemo odrediti (trouglovi, krugovi, njihovi delovi i sl.), ili kao trodimenzionalni objekti kojima umemo izračunati zapreminu (piramide, kocke, njihovi delovi i sl.),
  2°) elementi skupa Ω se biraju na slučajan način, tj. ravnopravan je izbor svake tačke,

  tada je verovatnoća nekog događaja A
$$\mathsf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.19}$$
gde je sa $m(A)$ označena mera (dužina, površina ili zapremina) oblasti koja odgovara događaju A, a sa $m(\Omega)$ je označena mera oblasti koja odgovara skupu Ω svih elementarnih ishoda (verovatnoća se dobija kao količnik mere „povoljnih elementarnih ishoda" i mere „svih mogućih elementarnih ishoda").

---

[32] *Svako od slova* `A`, `I`, `K`, `M`, `N`, `O` *je zapisano na po jedan listić papira, i listići se nasumice ređaju u niz. Izračunati verovatnoću da će se na ovaj način formirati reč* `KAMION`.

Rešenje: Pošto su sva slova različita, broj mogućih različitih rasporeda listića (elementarnih ishoda) je $\mathrm{P}_6 = 6! = 720$. Očigledno postoji samo jedan „povoljan raspored", a zbog nasumičnog ređanja listića su svi elementarni ishodi jednakoverovatni, te je na osnovu (1.18) verovatnoća formiranja reči `KAMION`
$$p = \tfrac{1}{720} \approx 0.0014.$$

---

[33] *Računar je sa spiska reči formiranih pomoću slova* `a`, `a`, `a`, `e`, `i`, `k`, `m`, `m`, `t`, `t` *odabrao jednu. Izračunati verovatnoću da je odabrana reč* `matematika`.

Rešenje: Koristeći isti princip kao u zadataku [32], dobija se verovatnoća
$$p = \tfrac{1}{\mathrm{P}^{10}_{3,2,2}} = \tfrac{1}{\frac{10!}{3!2!2!}} = \tfrac{3!2!2!}{10!} = \tfrac{24}{3628800} = \tfrac{1}{151200}$$
(ovaj put pri prebrojavanju mogućih elementarnih ishoda koristimo permutacije s ponavljanjem jer se među slovima od kojih se sastavlja reč nalaze 3 primerka slova `a`, 2 primerka slova `m` i 2 primerka slova `t`).

#) Posmatrajmo eksperiment bacanja (okretanja) novčića. Ako pretpostavimo da je pojava glave jednaka pojavi pisma odrediti vjerovatnoće događaja. Odrediti i vjerovatnoće događaja pod pretpostavkom da je pojava glave dva puta vjerovatnije od pojave pisma.

Rj.:

(a) Prostor uzoraka je $S = \{G, P\}$.

Prema definiciji vjerovatnoće $P(S) = 1$. Imamo

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2}, \qquad P(\{P\}) = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$P(\{G\}) = \frac{2}{3}, \qquad P(\{P\}) = \frac{1}{3}$$

#) Posmatrajmo eksperiment bacanja (kotrljanja) kockice, i pretpostavimo da svih šest brojeva imaju jednaku mogućnost pojavljivanja. Odrediti $P(\{1\})$, $P(\{2\}), \dots, P(\{6\})$, i $P(\{2,4,6\})$.

Rj. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{4\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{5\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

↖ vjerovatnoća da se pojavi paran broj

Primjetimo

$$E \cup E^c = S$$

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

$$\underline{P(E^c) = 1 - P(E)}$$

$$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(EF)$$

$$\underline{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)}$$

Isto tako $\underline{P(\emptyset) = 0}$.

Ako su data tri događaja E, F i G tada

$$P(E \cup F \cup G) = P((E \cup F) \cup G) =$$

$$= P(E \cup F) + P(G) - P((E \cup F)G)$$

\# Posmatrajmo eksperiment bacanja dva obična novčića. Ako su dati događaji

$$E = \{(G,G),(G,P)\} \quad ; \quad F = \{(G,G),(P,G)\}$$

(tj. E je događaj da se na prvom novčiću pokaže glava, a F je događaj da se na drugom novčiću pokaže glava), izračunati $P(E \cup F)$.

Rj:

$$S = \{(G,G),(G,P),(P,G),(P,P)\}$$

$$P(S) = 1$$

$$P(\{G,G\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{G,P\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{P,G\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{P,P\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(\{G,G\}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ovu vjerovatnoću smo naravno mogli izračunati i direktno

$$P(E \cup F) = P(\{G,G\},\{G,P\},\{P,G\}) = \frac{3}{4}$$

\# Kutija sadrži tri kuglice: jednu crvene, jednu zelene i jednu plave boje. Posmatrajmo eksperiment koji se sastoji od uzimanja jedne kuglice iz kutije, pa uzimanja druge kuglice iz kutije. Šta je prostor uzoraka? Ako, u svakom trenutku, svaka kuglica iz kutije ima jednaku mogućnost da bude izabrana, kolika je vjerovatnoća svake tačke iz prostora uzoraka?

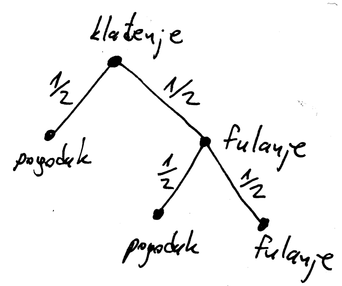
Rj: Prostor uzoraka je

$$S = \{(C,Z),(C,P),(Z,C),(Z,P),(P,C),(P,Z)\}$$

gdje, na primjer, (C,Z) znači da je prva izvučena kuglica crvene boje, a druga zelene. Vjerovatnoća svakog od ovih izlaza je $\frac{1}{6}$.

U nekoj sportskoj kladionici postoji igra utrka cuka, u kome se šest cuka takmiče u trčanju do cilja. Neki čovjek koristi sljedeći sistem klađenja na cuke. On ulaže 1KM na cuku sa crvenom bojom. Ako taj cuko pobjedi on završava sa klađenjem. Ako izgubi, on drugi put ulaže 2KM na istog cuku i bez obzira na ishod on završava sa klađenjem. Pretpostavljajući da je vjerovatnoća svake opklade $\frac{1}{2}$, izračunati kolika je vjerovatnoća da čovjek ode kući kao pobjednik? Zašto ovaj sistem klađenja ne koristi niko?

Rj.:



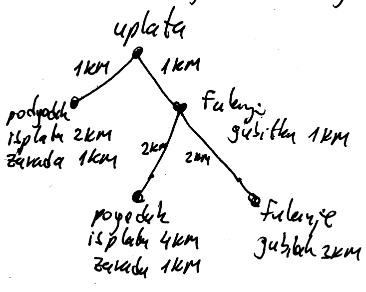
Prostor uzoraka u ovom slučaju je

$$S=\{p, (f,p), (f,f)\}$$

gdje je

$$P(\{p\})=\frac{1}{2}, \quad P(\{(f,p)\})=\frac{1}{4}, \quad P(\{(f,f)\})=\frac{1}{4}$$

Pretpostavimo da je koeficijent na cuki 2. Tada:

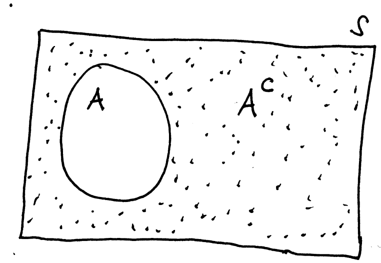


Ako je E događaj da ode kući kao pobjednik tada $P(E)=\frac{3}{4}$.

Ako pobjedi tada mu je zarada 1KM, ako izgubi na gubitku je 3KM.

U nekom eksperimentu događaj A nastupa sa vjerovatnoćom $P(A)=\frac{1}{3}$. Koliko pokusa treba napraviti da bismo s vjerovatnoćom 0,99 mogli očekivati bar jedno pojavljivanje događaja A?

Rj.



$$P(A)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A^c)=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{P(A)=1-P(A^c)}$$

Neka je D događaj: "da se u n pokušaja bar jednom realizuje događaj A".

Tada je

D^c: "da se u n pokušaja nijednom ne realizuje događaj A"

$$\Rightarrow P(D^c)=\underbrace{P(A^c)\cdot P(A^c)\cdot \ldots \cdot P(A^c)}_{n \text{ puta}}=\left[P(A^c)\right]^n$$

$$\Rightarrow P(D)=1-P(D^c)$$

tj. $0,99=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n=0,01$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n=\ln(0,01)$$

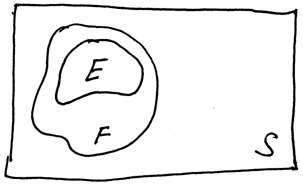
$$n=\frac{\ln(0,01)}{\underbrace{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}_{\ln 2-\ln 3}}\approx 11,35$$

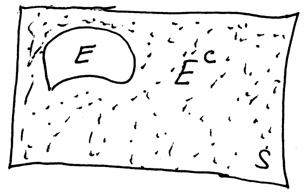
$\Rightarrow$ Eksperiment treba ponoviti 12 puta da bi se sa vjerovatnoćom 0,99 moglo očekivati bar jedno realizovanje događaja A.

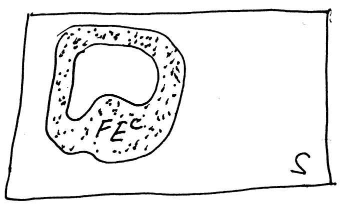
(#) Kažemo da je $E \subseteq F$ ako je svaka tačka iz E također u F. Pokazati da ako je $E \subseteq F$ tada je

$$P(F) = P(E) + P(FE^c) \geq P(E)$$

Rj.







E i E^c su disjunktni

$\Rightarrow$ E i FE^c disjunktni

pa imamo da je

$$F = E \cup FE^c$$

$$\Rightarrow P(F) = P(E) + P(FE^c)$$

a kako iz definicije vjerovatnoće na događaju imamo da $0 \leq P(E) \leq 1$ za svaki događaj E to je $P(FE^c) \geq 0$

$$\Rightarrow P(F) = P(E) + P(FE^c) \geq P(E)$$

[31] *Bacaju se dve kockice za igru. Izračunati verovatnoće događaja*

Q - *„kvadratni koren zbira palih brojeva biće ceo broj”,*

S_2 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 2”,*

S_3 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 3”,*

S_4 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 4”,*

kao i događaja $Q \cup S_4$, S_2S_3, $S_2 \cup S_3$, S_3S_4, $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ *i* $\overline{S_2 \cup S_3}$.

Rešenje: Zadatak možemo rešiti primenom Laplasove definicije, tj. primenom (1.18), ukoliko budu zadovoljeni uslovi za njenu primenu. Skup svih elementarnih ishoda je $\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ gde je (i,j) događaj *„na prvoj kockici će pasti broj i, a na drugoj kockici će pasti broj j”* (da bi elementarni ishodi bili jednakoverovatni, moramo razlikovati kockice kao prvu i drugu jer bi inače elementarni događaji (i,j) za $i \neq j$ bili dvostruko verovatniji od događaja (i,i); npr. ako je jedna kockica plava a jedna crvena tada brojeve 1 i 2 možemo dobiti tako što na plavoj padne 1 a na crvenoj 2 ili tako što na plavoj padne 2 a na crvenoj 1, dok dve jedinice možemo dobiti samo na jedan način, kada na obe kockice padne broj 1). Pri tome je $|\Omega| = 36$.

Direktnim proveravanjem dobijamo

$Q = \{(1,3),(3,1),(2,2),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$,

$S_2 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),$
$(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

(zbir dva broja je paran ako su oba broja parna ili oba neparna),

$S_3 = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$,

$S_4 = \{(1,3),(2,2),(2,6),(3,1),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(6,6)\}$,

te primenom (1.18) sledi (zadovoljeni su uslovi za primenu Laplasove definicije - skupovi su konačni, a elementarni ishodi su jednakoverovatni)

$$\mathsf{P}(Q) = \tfrac{7}{36}, \quad \mathsf{P}(S_2) = \tfrac{3\cdot3+3\cdot3}{36} = \tfrac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(S_3) = \tfrac{6\cdot2}{36} = \tfrac{1}{3}, \quad \mathsf{P}(S_4) = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4}.$$

Koristeći dobijene rezultate kao i osobine verovatnoće dalje dobijamo

- $Q \cup S_4 = S_4 + \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(Q \cup S_4) = \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36}$,
- $S_2S_3 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(S_2S_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,
- $\mathsf{P}(S_2 \cup S_3) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(S_2) + \mathsf{P}(S_3) - \mathsf{P}(S_2S_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,
- $S_3S_4 = \{(6,6)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(S_3S_4) = \frac{1}{36}$,
- s obzirom da je $S_4 \subseteq S_2$ tj. $S_4 \subseteq S_2 \cup S_3$, dobijamo $\mathsf{P}(S_2 \cup S_3 \cup S_4) = \mathsf{P}(S_2 \cup S_3) = \frac{2}{3}$,
- $\mathsf{P}(\overline{S_2 \cup S_3}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(S_2 \cup S_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

[34] *Na osam listića papira se napisani brojevi* 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, *i na slučajan način se odabiraju dva listića. Izračunati verovatnoću da će zbir brojeva sa odabranih listića biti veći od* 15.

Rešenje: Svaki od jednakoverovatnih elementarnih ishoda (izbor je slučajan) predstavlja izbor 2 od 8 ispisanih brojeva pri čemu redosled 2 odabrana broja nije bitan, te sledi da je ukupan broj mogućih elementarnih ishoda $\mathrm{C}_2^8 = \binom{8}{2} = 28$. Dakle, $\Omega = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{2,4,6,7,8,11,12,13\} \wedge i < j\}$, i $|\Omega| = 28$. Događaj „*zbir brojeva sa odabranih listića će biti veći od* 15" je skup elementarnih ishoda

$$A = \{\{4,12\},\{4,13\},\{6,11\},\{6,12\},\{6,13\},\{7,11\},\{7,12\},$$
$$\{7,13\},\{8,11\},\{8,12\},\{8,13\},\{11,12\},\{11,13\},\{12,13\}\},$$

te se koristeći (1.18) dobija

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{|A|}{|\Omega|} = \tfrac{14}{28} = \tfrac{1}{2}.$$

---

[35] *Kockica za igru se baca* 3 *puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - „*jedinica će pasti na bar jednoj kockici*",
B - „*u sva tri bacanja će pasti različiti brojevi*",
C - „*na bar dve kockice će pasti parni brojevi*".

Rešenje: Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{(i,j,k) \mid i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ gde je (i,j,k) događaj „*pri prvom bacanju će pasti broj i, pri drugom j, a pri trećem k*", te je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_3^6 = 6^3 = 216$. Verovatnoće događaja A, B, C izračunavamo koristeći (1.18) (vidi zadatak [31]), pri čemu ćemo broj „povoljnih" elementarnih ishoda izračunavati kombinatornim putem. Pri tome događaj C razlažemo na disjunktne događaje C_2 - „*parni brojevi će pasti na tačno dve kockice*" (na prvoj i drugoj, na prvoj i trećoj, ili na drugoj i trećoj) i C_3 - „*parni brojevi će pasti na sve tri kockice*". Tako dobijamo

$\mathsf{P}(A) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\overline{\mathrm{V}}_3^5}{216} = 1 - \frac{5^3}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.4213$ ($\overline{A}$ je događaj „*sva tri puta će pasti broj različit od* 1*, tj. broj iz skupa* $\{2,3,4,5,6\}$"),

$\mathsf{P}(B) = \frac{\mathrm{V}_3^6}{216} = \frac{6\cdot5\cdot4}{216} = \frac{120}{216} \approx 0.5556$,

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(C_2 + C_3) = \mathsf{P}(C_2) + \mathsf{P}(C_3) = 3\frac{\overline{\mathrm{V}}_1^3\,\overline{\mathrm{V}}_2^3}{216} + \frac{\overline{\mathrm{V}}_3^3}{216} = \frac{81}{216} + \frac{27}{216} = \frac{108}{216} = 0.5$ (C_2 je događaj „*na jednoj od tri kockice će pasti broj iz skupa* $\{1,3,5\}$ *a na dve broj iz skupa* $\{2,4,6\}$", a C_3 je događaj „*sva tri puta će pasti broj iz skupa* $\{2,4,6\}$").

---

[38] *Iz špila od* 52 *karte se nasumice izvlače* 3 *karte. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - „*izvući će se trojka, sedmica i kec*",
B - „*izvući će se tačno jedan kec*",
C - „*izvući će se bar jedan kec*",
D - „*izvući će se najviše dva keca*",
E - „*među izvučenim kartama biće tačno jedan kec i tačno dve tref karte*",

Rešenje: Iz opisa događaja vidimo da nije bitan redosled izvučenih karata, te je skup elementarnih ishoda $\Omega = \{\{i,j,k\} \mid i,j,k \in K \wedge i \neq j \wedge i \neq k \wedge j \neq k\}$ gde je K skup karata, tako da je $|\Omega| = \mathrm{C}_3^{52} = \frac{52!}{3!49!} = \frac{50\cdot51\cdot52}{6} = 22100$. Takođe je očigledno da su elementarni ishodi jednakoverovatni, te verovatnoće navedenih događaja izračunavamo korišćenjem (1.18) (vidi zadatak [31]).

- Elementarni ishodi od kojih se sastoji događaj A se realizuju kada biramo po jednu kartu iz skupa od 4 trojke, 4 sedmice i 4 keca, te primenom pravila proizvoda dobijamo

  $\mathsf{P}(A) = \frac{\mathrm{C}_1^4\cdot\mathrm{C}_1^4\cdot\mathrm{C}_1^4}{22100} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{22100} = \frac{4\cdot4\cdot4}{22100} \approx 0.0029.$

- Elementarni ishodi od kojih se sastoji događaj B se realizuju kada biramo jednu kartu iz skupa od 4 keca i dve karte iz skupa od ostalih $52 - 4 = 48$ karata, te primenom pravila proizvoda dobijamo

  $\mathsf{P}(B) = \frac{\mathrm{C}_1^4\cdot\mathrm{C}_2^{48}}{22100} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{2}}{22100} = \frac{4\cdot1128}{22100} \approx 0.2042.$

- Prvi način: predstavimo C kao uniju disjunktnih događaja $C = C_1 + C_2 + C_3$ gde je C_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj „*biće izvučeno tačno i kečeva*". Koristeći isti princip prebrojavanja kao kod događaja A i B dobijamo

  $|C_1| = \mathrm{C}_1^4\cdot\mathrm{C}_2^{48} = \binom{4}{1}\cdot\binom{48}{2} = 4512,$

  $|C_2| = \mathrm{C}_2^4\cdot\mathrm{C}_1^{48} = \binom{4}{2}\cdot\binom{48}{1} = 288,$

  $|C_3| = \mathrm{C}_3^4\cdot\mathrm{C}_0^{48} = \binom{4}{3}\cdot\binom{48}{0} = 4$

  te je $|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3| = 4804$, pa sledi

  $\mathsf{P}(C) = \frac{4804}{22100} \approx 0.2174.$

  Drugi način: $\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(\overline{C})$, gde je $|\overline{C}|$ broj načina da se iz skupa od 48 karata među kojima nema ni jednog keca izaberu 3 karte. Dakle, $|\overline{C}| = \mathrm{C}_3^{48} = 17296$, te je

  $\mathsf{P}(C) = 1 - \frac{17296}{22100} \approx 0.2174.$

- $\mathsf{P}(D) = 1 - \mathsf{P}(\overline{D})$, gde je D događaj „*biće izvučena tri keca*", tj. $|\overline{D}|$ broj načina da se iz skupa od 4 keca izaberu 3 karte. Dakle, $|\overline{D}| = \mathrm{C}_3^4 = 4$, te je

  $\mathsf{P}(D) = 1 - \frac{4}{22100} \approx 0.9998.$

- Podelimo skup karata na sledeća 4 disjunktna skupa:

  S_1 - skup koji čini samo kec-tref,

  S_2 - skup koji čine tri preostala keca (pik, karo i tref),

  S_3 - skup koji čine sve tref karte bez keca-tref (ima ih $\frac{52}{4} - 1 = 12$),

  S_4 - skup koji čini sve preostale karte (ima ih $52 - 1 - 3 - 12 = 36$).

  Događaj E se može predstaviti kao $E = E_1 + E_2$ gde je E_1 događaj „*biće izvučeni kec tref, jedna karta iz skupa* S_3*, i jedna karta iz* S_4" a E_2 je događaj „*biće izvučeni jedan kec iz skupa* S_2*, i dve karte iz skupa* S_3". Na osnovu pravila proizvoda je

  $|E_1| = |S_1|\cdot|S_3|\cdot|S_4| = \binom{1}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{1} = 1\cdot12\cdot36 = 432,$

  $|E_2| = |S_2|\cdot\mathrm{C}_2^{|S_3|} = \binom{3}{1}\cdot\binom{12}{2} = 3\cdot66 = 198.$

  Skupovi E_1 i E_2 su disjunktni, te je

  $$\mathsf{P}(E) = \frac{|E_1| + |E_2|}{22100} = \frac{630}{22100} \approx 0.0285.$$

[36] *Bacaju se dve kockice za igru, a iz kutije koja sadrži 3 bele i 4 crne kuglice izvlače se odjednom dve kuglice. Koji je od događaja*

A - *„na kockicama će pasti jednaki brojevi, ili brojevi čiji je zbir 5",*
B - *„iz kutije će se izvući dve crne kuglice, ili kuglice različitih boja"*

verovatniji?

Rešenje: Skup elementarnih ishoda pri bacanju kockica je

$$\Omega_1 = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

pri čemu su svi elementarni ishodi $(i,j) \in \Omega$ jednakoverovatni i njihov ukupan broj je $|\Omega_1| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 6^2 = 36$. Pošto je

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\},$$

sledi $\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{10}{36} \approx 0.2778$.

S druge strane, skup elementarnih ishoda pri izvlačenju kuglica je

$$\Omega_2 = \{\{i,j\} \mid i,j \in K \ \wedge \ i \neq j\}$$

gde je K skup kuglica koje se nalaze u kutiji, te je $|\Omega_2| = \mathrm{C}_2^{3+4} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ pri čemu su svi elementarni ishodi jednakoverovatni. Događaj B možemo predstaviti kao $B = B_1 + B_2$ gde je B_1 događaj „*iz kutije će se izvući dve crne kuglice*" a B_2 je događaj „*iz kutije će se izvući kuglice različitih boja*", te je

$$|B| = |B_1| + |B_2| = \mathrm{C}_0^3 \cdot \mathrm{C}_2^4 + \mathrm{C}_1^3 \cdot \mathrm{C}_1^4 = \binom{3}{0}\cdot\binom{4}{2} + \binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1} = 1\cdot 6 + 3\cdot 4 = 18$$

(brojevi $|B_1|$ i $|B_2|$ su izračunati pomoću pravila proizvoda - biramo 0 tj. 1 element iz skupa belih, i 2 tj. 1 element iz skupa crnih kuglica). Primenom (1.18) sledi da je $\mathsf{P}(B) = \frac{18}{21} \approx 0.8571$.

Dakle, $\mathsf{P}(B) \approx 0.8571 > \mathsf{P}(A) \approx 0.2778$, tj. događaj B je verovatniji.

---

[37] *Neka osoba je zaboravila poslednje dve cifre nekog telefonskog broja, ali se pouzdano seća da su te dve cifre različite. Izračunati verovatnoću da će iz prvog pokušaja pogoditi te dve cifre.*

Rešenje: Pošto nema dodatnih informacija, podrazumeva se da se poslednje dve cifre pogađaju nasumice, što znači da su mogući elementarni ishodi jednakoverovatni. Elementarni ishodi su uređeni parovi cifara (kod telefonskog broja je bitan redosled cifara) i postoji samo jedan „povoljan" elementarni ishod za događaj A - „*osoba će iz prvog pokušaja pogoditi poslednje dve cifre*", te korišćenjem (1.18) (vidi zadatak [31]) dobijamo $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{\mathrm{V}_2^{10}} = \frac{1}{90} \approx 0.0111$ (broj „mogućih" ishoda je broj varijacija bez ponavljanja V_2^{10} jer je bitan poredak cifara, cifre treba da su različite i biraju se 2 cifre iz skupa od 10 cifara).

---

[39] *U posudi se nalazi 9 belih, 8 crvenih i 7 žutih kuglica. Izvlači se 8 kuglica odjednom. Izračunati verovatnoću da će biti izvučene 2 bele, 4 crvene i 2 žute kuglice.*

Rešenje: Kuglice se izvlače odjednom, što znači da redosled izvučenih kuglica nije bitan. Stoga je skup mogućih elementarnih ishoda skup 8-elementnih podskupova skupa kuglica u posudi, tj.

$$\Omega = \{A \mid A \subseteq \Omega \ \wedge \ |A| = 8\}$$

pri čemu je $|\Omega| = \mathrm{C}_8^{9+8+7} = \mathrm{C}_8^{24} = 735471$ (dakle, koristimo takav način prebrojavanja mogućih i povoljnih elementarnih ishoda pri kojem razlikujemo između sebe i kuglice istih boja). „Povoljni" izbori su oni kod kojih biramo 2 iz skupa od 9 belih kuglica, 4 iz skupa od 8 crvenih kuglica, i 2 iz skupa od 7 žutih kuglica, te se koristeći pravilo proizvoda dobija da takvih izbora („povoljnih" elementarnih ishoda) ukupno ima $\mathrm{C}_2^9 \cdot \mathrm{C}_4^8 \cdot \mathrm{C}_2^7 = \binom{9}{2}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{2} = 36\cdot 70\cdot 21 = 52920$, te se na osnovu (1.18) (s obzirom na formirani model i slučajan izbor kuglica, elementarni ishodi su jednakoverovatni) sledi da tražena verovatnoća iznosi $p = \frac{52920}{735471} \approx 0.0720$.

---

[40] *Bacaju se bela i plava kockica za igru. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - *„zbir palih brojeva biće manji od 9",*
B - *„na obe kockice će pasti isti broj",*
C - *„na beloj kockici će pasti broj veći nego na plavoj",*
D - *„na plavoj kockici će pasti broj za dva veći od broja na beloj kockici",*
E - *„na obe kockice će pasti parni brojevi čiji je zbir bar 8",*
F - *„bar na jednoj kockici će pasti broj 6".*

Rešenje: S obzirom da se podrazumeva da su kockice pravilnog oblika, elementarni događaji su jednakoverovatni, i skup elementarnih događaja je

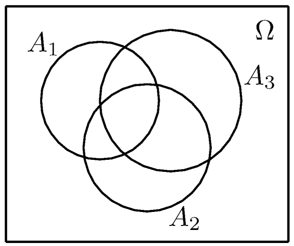
$$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

gde je (i,j) događaj „*na beloj kockici će pasti broj i, a na plavoj kockici će pasti broj j*", pri čemu je njihov broj $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 6^2 = 36$. Za svaki od navedenih događaja X ćemo odrediti broj elementarnih događaja od kojih se X sastoji, te se na osnovu (1.18) dobija $\mathsf{P}(X) = \dfrac{|X|}{|\Omega|} = \dfrac{|X|}{36}$.

- $|A| = |\Omega| - |\overline{A}| =$
  $= 36 - |\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}| =$
  $= 36 - 10 = 26 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(A) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \approx 0.7222$,
- $|B| = |\{(i,i) \mid i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}| = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$,
- $|C| = |\{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\} \ \wedge \ i > j\}| = 5+4+3+2+1 = 15$
  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$,
- $|D| = |\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}| = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0.1111$,
- $|E| = |\{(2,6),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}| = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$,
- $|F| = |\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}| =$
  $= 11$
  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(F) = \frac{11}{36} \approx 0.3056$.

[41] *Projektna firma je učestvovala na tri konkursa, na svakom sa po jednim projektom. Neka su A_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaji „biće prihvaćen projekat na i-tom konkursu", i poznato je da je* $\mathsf{P}(A_1) = 0.22$, $\mathsf{P}(A_2) = 0.25$, $\mathsf{P}(A_3) = 0.28$, $\mathsf{P}(A_1A_2) = 0.11$, $\mathsf{P}(A_1A_3) = 0.05$, $\mathsf{P}(A_2A_3) = 0.07$ *i* $\mathsf{P}(A_1A_2A_3) = 0.01$. *Opisati rečima i izračunati verovatnoće sledećih događaja* $A_1 \cup A_2$, $\overline{A}_1\overline{A}_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ *i* $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.

Rešenje:



- $A_1 \cup A_2$ je događaj „*biće prihvaćen projekat bar na jednom od prva dva konkursa*", i važi

  $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1A_2) = 0.22 + 0.25 - 0.11 = 0.36.$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2$ je događaj „*neće biti prihvaćen projekat ni na jednom od prva dva konkursa*", i važi

  $\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \mathsf{P}(\overline{A_1 \cup A_2}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.36 = 0.64.$

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ je događaj „*biće prihvaćen bar jedan projekat*", i važi

  $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \overset{(1.8)}{=}$

  $= \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) - \mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1A_3) - \mathsf{P}(A_2A_3) + \mathsf{P}(A_1A_2A_3) =$

  $= 0.75 - 0.23 + 0.01 = 0.53.$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ je događaj „*neće biti prihvaćen projekat ni na jednom konkursu*", i važi

  $\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \mathsf{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 0.53 = 0.47.$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ je događaj „*projekat neće biti prihvaćen na A_1 i A_2 ili na A_3* "

  $\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) + \mathsf{P}(\overline{A}_3) - \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \overset{(1.2)}{=} 0.64 + (1 - \mathsf{P}(A_3)) - 0.47 =$

  $= 0.64 + 0.72 - 0.47 = 0.89.$

---

[42] *Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Verovatnoća da će se morati zaustaviti kod prvog iznosi* 0.4, *a kod drugog* 0.5. *Takođe je poznato da verovatnoća da će morati da se zaustavi bar kod jednog semafora iznosi* 0.6. *Izračunati verovatnoće događaja*

A	-	*„inženjer će morati da se zaustavi kod oba semafora",*
B	-	*„inženjer će morati da se zaustavi samo kod prvog semafora",*
C	-	*„inženjer će morati da se zaustavi kod tačno jednog semafora".*

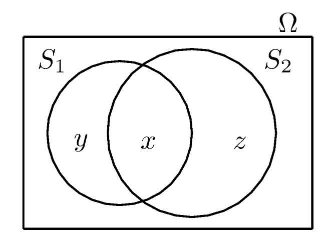
Rešenje: Označimo sa S_i, $i = \{1,2\}$ događaj "*inženjer će morati da se zaustavi kod i-tog semafora*". Na osnovu datih podataka $\mathsf{P}(S_1) = 0.4$, $\mathsf{P}(S_2) = 0.5$ i $\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = 0.6$ izračunavamo

- $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S_1S_2) \overset{(1.9)}{=} \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3,$

- $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = \mathsf{P}(S_1 \setminus S_1S_2) \overset{(1.5)}{=} \mathsf{P}(S_1) - \mathsf{P}(S_1S_2) = 0.4 - 0.3 = 0.1,$

- $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2 + \overline{S}_1S_2) \overset{(1.13)}{=} \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) + \mathsf{P}(\overline{S}_1S_2) = 0.1 + \mathsf{P}(S_2 \setminus S_1S_2) \overset{(1.5)}{=}$

  $= 0.1 + (\mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1S_2)) = 0.1 + (0.5 - 0.3) = 0.3.$



Komentar: verovatnoću možemo često interpretirati grafički; verovatnoću nekog događaja $X \subseteq \Omega$ možemo predstaviti kao meru oblasti (npr. „površine") Ω, izraženo u procentima p odnosno odgovarajućem broju $\frac{p}{100} \in [0,1]$; u ovom zadatku (vidi sliku) bi to značilo: $\mathsf{P}(S_1S_2) = x$, $\mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = y$, $\mathsf{P}(\overline{S}_1S_2) = z$,

$\mathsf{P}(S_1) = x + y = 0.4$, $\mathsf{P}(S_2) = x + z = 0.5$, $\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = x + y + z = 0.6$,

te rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 0.4 \\ x + z & = & 0.5 \\ x + y + z & = & 0.6 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 0.4 \\ - y + z & = & 0.1 \\ z & = & 0.2 \end{array}$$

dobijamo $z = 0.2$, $y = 0.1$, $x = 0.3$, *odnosno*

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S_1S_2) = x = 0.3,$

$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = y = 0.1,$

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\overline{S}_1S_2 + S_1\overline{S}_2) = \mathsf{P}(\overline{S}_1S_2) + \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = z + y = 0.3.$

---

3. Uslovna vjerovatnoća

Pretpostavimo da želimo baciti dvije kockice i da svih 36 mogućnosti za izlaz imaju istu šansu da se pojave, tj. imaju vjerovatnoću $\frac{1}{36}$. Pretpostavimo da smo primjetili da je prva kockica 4. Tada, ako imamo ovu informaciju, kolika je vjerovatnoća da suma dvije kockice bude jednako 6? Da bi izračunali ovu vjerovatnoću, rezonujemo na sljedeći način: Kako nam je dato da je prva kockica 4, slijedi da može biti najviše šest mogućnosti za izlaz u našem eksperimentu, naime, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$ i $(4,6)$. Kako svaka od ovih izlaza orginalno ima istu vjerovatnoću pojavljivanja, one bi i dalje trebale imati jednaku vjerovatnoću. To jest, ako je dato da je prva kockica četri, tada (uslovna) vjerovatnoća svakih od izlaza $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$ je $\frac{1}{6}$ dok je (uslovna) vjerovatnoća ostalih 30 tački iz prostora uzoraka 0. Prema tome, željena vjerovatnoća će biti $\frac{1}{6}$.

Ako E označava događaj da je suma dvije bačene kockice 6, a F označava događaj da je prva bačena kocka četri, tada vjerovatnoću upravo dobijenu nazivamo uslovna vjerovatnoća da se pojavi E ako je dato F se već pojavilo i ovo označavamo sa $P(E|F)$.

Vrijedi formula: $$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}.$$

Ⓗ Posmatrajmo eksperiment u kome bacamo dvije kockice jednu iza druge. Nakon bacanja smo primjetili da je prva kockica 4. Kolika je vjerovatnoća da suma dvije kockice bude jednako 6?

Rj. Kako nam je dato da je prva kockica 4, to slijedi da može biti najviše šest mogućnosti za izlaz u našem eksperimentu, naime

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6)$$

Kako svaki od ovih izlaza ima istu vjerovatnoću to je

$$P(\{\text{suma dvije kockice} = 6\}) = P(\{(4,2)\}) = \frac{1}{6}.$$

Primjetimo da je vjerovatnoća ostalih 30 tački iz prostora uzoraka jednako nuli.

Pretpostavimo da se u šeširu nalaze karte sa brojevima od jedan do deset, da su izmiješane i da izvlačimo jednu kartu. Ako znamo da je broj na izvučenoj karti najmanje pet, izračunati kolika je uslovna vjerovatnoća da je broj na karti 10?

Rj. $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Svaki od ovih događaja ima vjerovatnoću $\frac{1}{10}$, tj:

$P(\{1\})=P(\{2\})=\ldots=P(\{10\})=\frac{1}{10}$

Neka je E događaj da je broj na izvučenoj karti 10. Tada

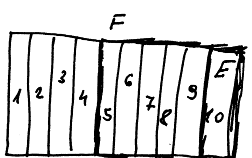
$P(E)=P(\{10\})=\frac{1}{10}$.

Neka je F događaj da je izvučena karta najmanje 5. Tada

$$P(F)=P(\{5,6,7,8,9,10\})=\frac{6}{10}.$$

Ono što mi želimo izračunati je $P(E|F)$. Koristićemo jednakost

$$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)};$$



$EF=E$ (broj na karti će biti oboje i 10 i najmanje 5 akko je baš broj jednak 10)

Time $P(E|F)=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{6}$.

Neka familija ima dvoje djece. Kolika je uslovna vjerovatnoća da su oba djeteta dječaci, ako nam je dato da je najmanje jedno dijete dječak?

Rj. Prostor uzoraka u ovom slučaju je

b - dječak
g - djevojčica

$$S=\{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}.$$

i svi izlazi su jednako mogući (npr. (b,g) znači, da je starije dijete dječak a mlađe dijete djevojčica).

$P(\{(b,b)\})=\frac{1}{4}$, $P(\{(b,g)\})=\frac{1}{4}$, $P(\{(g,b)\})=\frac{1}{4}$, $P(\{(g,g)\})=\frac{1}{4}$.

Neka B označava događaj da su oba djeteta dječaci. Tada

$$P(B)=P(\{(b,b)\})=\frac{1}{4}$$

Neka A označava događaj da je najmanje jedno dijete dječak. Tada

$$P(A)=P(\{(b,b),(b,g),(g,b)\})=\frac{3}{4}$$

Mi trebamo izračunati $P(B|A)$. Koristimo formulu

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}$$

Imamo

$$P(B|A)=\frac{P(\{(b,b)\})}{P(\{(b,b),(b,g),(g,b)\})}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

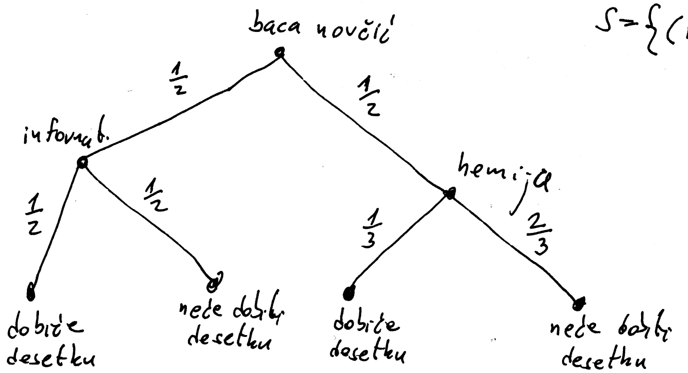
(#) Suljo kao izborni predmet može izabrati kurs iz informatike ili iz hemije. Ako Suljo izabere kurs iz informatike, tada vjerovatnoća da predmet položi sa desetkom u indeksu iznosi $\frac{1}{2}$; a ako izabere kurs iz hemije vjerovatnoća da dobije desetku iznosi $\frac{1}{3}$. On je odlučio da ovu važnu odluku donese bacanjem običnog novčića. Kolika je vjerovatnoća da Suljo dobije desetku iz hemije.

Rj.

Zadatak se može uraditi na više načina.

I način

Formirajmo prostor uzoraka S.



$S = \{(i,10), (i,<10), (h,10), (h,<10)\}$

gdje

$P(\{(i,10)\}) = \frac{1}{4}$

$P(\{(i,<10)\}) = \frac{1}{4}$

$P(\{(h,10)\}) = \frac{1}{6}$

$P(\{(h,<10)\}) = \frac{2}{6}$

tražena vjerovatnoća

II način

Označimo sa A i C sljedeće događaje

C - događaj da Suljo izabere kurs iz hemije

A - događaj da dobije desetku bez obzira koji kurs izabere

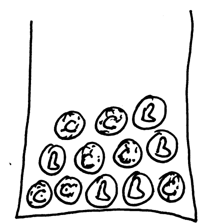
Mi trebamo odrediti $P(AC)$. Iz $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} \Rightarrow$

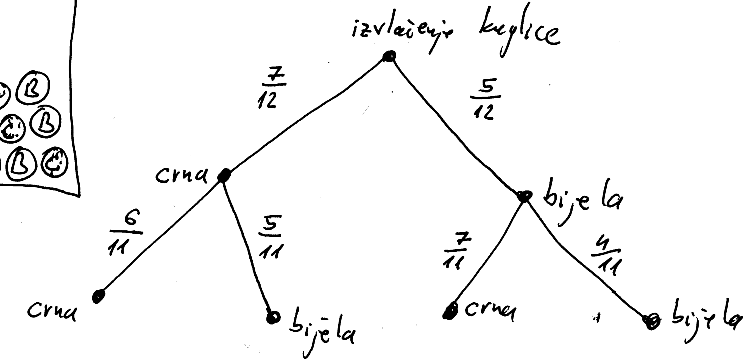
$$\Rightarrow P(AC) = P(C)P(A|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(#) Pretpostavimo da kutija sadrži sedam crnih kuglica i pet bijelih kuglica. Dvije kuglice izvlačimo iz kutije bez njihovog vraćanja nazad. Ako pretpostavimo da svaka kuglica u kutiji ima jednaku vjerovatnoću da bude izvučena, izračunati vjerovatnoću da obe izvučene kuglice budu crne?

Rj.

I način:





Prostor uzoraka je $S = \{(C,C), (C,B), (B,C), (B,B)\}$ gdje je npr. (B,C) znači da je prva izvučena kuglica bijela, a druga izvučena kuglica crna

$$P(\{(C,C)\}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{42}{132}$$

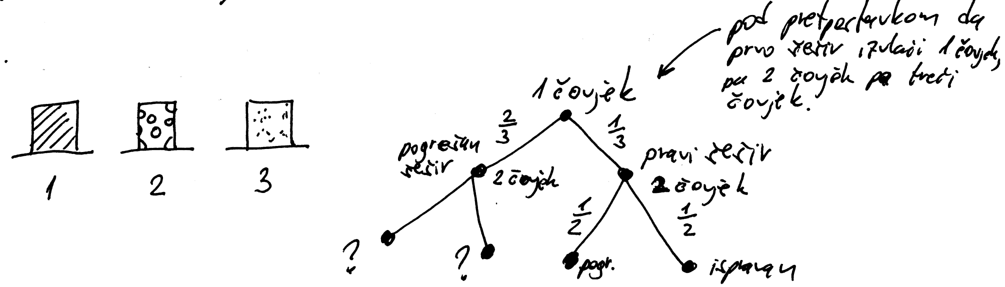
II način:

Sa F označimo događaj da je prva izvučena kuglica crna, a sa E označimo događaj da je druga izvučena kuglica crna. Sad, ako je dato da je prva izvučena kuglica crna, ostalo je šest crnih kuglica i pet bijelih pa je $P(E|F) = \frac{6}{11}$. Kako je $P(F) = \frac{7}{12}$ to je

$$P(EF) = P(E)P(E|F) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{42}{132}$$

(#) Pretpostavimo da su neka tri čovjeka na zabavi bacili svoj šešir u centar sobe. Šeširi su se prvo izmješali a onda je svaki čovjek na slučajan način izabrao šešir. Kolika je vjerovatnoća da ni jedan od tri čovjeka nisu izabrala svoj vlastiti šešir?

Rj.



Sa E_1, E_2, E_3 označimo sljedeće događaje

E_1 - događaj da je prvi čovjek izabrao svoj šešir

E_2 - događaj da je drugi čovjek izabrao svoj šešir

E_3 - događaj da je treći čovjek izabrao svoj šešir

Tada

$$P(E_1)=\frac{1}{3},\quad P(E_2)=\frac{1}{3},\quad P(E_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2|E_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},\quad P(E_1E_3)=P(E_2E_3)=\frac{1}{6}$$

$$P(E_1E_2E_3)=P(E_1E_2)P(E_3|E_1E_2)=\frac{1}{6}\underbrace{P(E_3|E_1E_2)}_{=1}=\frac{1}{6}$$

Prvo ćemo izračunati komplementarnu vjerovatnoću tj. da je najmanje jedan čovjek izabrao svoj vlastiti šešir $(P(E_1)\cup P(E_2)\cup P(E_3))$.

Koristimo sljedeću formulu

$$P(E_1\cup E_2\cup E_3)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1E_2)-P(E_1E_3)-P(E_2E_3)+P(E_1E_2E_3)$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

Odavde, vjerovatnoća da nijedan čovjek nije izabrao svoj šešir je $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

[48] *Koliko iznosi verovatnoća da iz špila od 32 karte 3 puta zaredom izvučemo kralja ako*

(a) *izvučenu kartu svaki put vraćamo u špil,*

(b) *izvučene karte ne vraćamo u špil?*

Rešenje: Označimo sa A_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj „*pri i-tom izvlačenju će biti izvučen kralj*". Događaj A: „*3 puta zaredom će biti izvučen kralj*" možemo predstaviti kao $A = A_1A_2A_3$, te na osnovu (1.15) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1A_2A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2|A_1)\,\mathsf{P}(A_3|A_1A_1)$$

(a) ako izvučene karte svaki put vraćamo u špil, tada svaki put izvlačimo iz špila sa istim sadržajem kao i pri prvom izvlačenju, što znači da su događaji A_i nezavisni, te sledi da je $\mathsf{P}(A_2|A_1) = \mathsf{P}(A_2) = \mathsf{P}(A_1)$ i $\mathsf{P}(A_3|A_1A_2) = \mathsf{P}(A_3) = \mathsf{P}(A_1)$, odnosno

$$\mathsf{P}(A) = (\mathsf{P}(A_1))^3 = (\tfrac{4}{32})^3 = (\tfrac{1}{8})^3 = \tfrac{1}{512} \approx 0.0020.$$

(b) $\mathsf{P}(A_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(A_2|A_1) = \frac{3}{31}$ (ako je u prvom izvlačenju izvučen kralj, tada se drugi put izvlači iz špila od 31 karte u kojem se nalaze 3 kralja),

$\mathsf{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ (ako su u prva dva izvlačenja izvučeni kraljevi, tada se treći put izvlači iz špila od 30 karata u kojem se nalaze 2 kralja),

$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{31}\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{1240}$.

---

[49] *U kutiji se nalaze 3 zelene i 4 bele kuglice. Pera izvlači 3 puta po jednu kuglicu iz kutije*

(a) *bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju,*

(b) *sa vraćanjem izvučene kuglice u kutiju.*

Izračunati verovatnoću događaja A–„Pera će izvući bar jednu kuglicu bele boje".

Rešenje: Prvo ćemo izračunati verovatnoću suprotnog događaja, tj. događaja $\bar{A}$– „*Pera neće izvući nijednu kuglicu bele boje*", pa pomoću njega verovatnoću traženog događaja. Označimo sa Z_i događaj „*u i-tom izvlačenju Pera je izvukao kulicu zelene boje*", $i = 1,2,3$. Tada je $\overline{A} = Z_1\,Z_2\,Z_3$ i $\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(Z_1\,Z_2\,Z_3)$.

(a) Pera izvlači kuglicu bez vraćanja prethodno izvučene kuglice u kutiju, tako da izvlačenja nisu nezavisna i

$$\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(Z_1Z_2Z_3) = \mathsf{P}(Z_1)\,\mathsf{P}(Z_2|Z_1)\,\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_2) = \tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{35},$$

odakle sledi $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = \frac{34}{35}$.

(b) Pera izvlači kuglicu tako što svaki put vrati predhodno izvučenu kuglicu u kutiju, te su izvlačenja međusobno nezavisna tako da je $\mathsf{P}(Z_2|Z_1) = \mathsf{P}(Z_2) = \mathsf{P}(Z_1)$, $\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_2) = \mathsf{P}(Z_3) = \mathsf{P}(Z_1)$, tako da je

$$\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(Z_1)^3 = \left(\tfrac{3}{7}\right)^3,$$

odakle je $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \left(\tfrac{3}{7}\right)^3 \approx 0.921282799$.

Namjena ovih zadataka, datih na papiru, je da na času studenti ne budu opterećeni pisanjem teksta zadatka nego da se koncentrišu na njihova rješenje. Sva rješenja zadataka možete pogledati u svesci sa vježbi iz predmeta „Inžinjerska matematika III“, koju možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/. U svesci se nalaze i neki zadaci koji nisu na ovom papiru, kao i sav dio teorije koja pomaže puno boljem razumijevanju gradiva. Jedna od poznatih latinskih izreka je: Površnost razumijevanja je majka neuspjeha.

Nastavak lekcije: **Uvod u teoriju vjerovatnoće**

Geometriska vjerovatnoća

Geometriska vjerovatnoću koristimo na slučaj kada imamo neprobrojivo mnogo ishoda. Na primjer, pretpostavimo da imamo na pravoj, u ravni ili prostoru neku oblast G i u njoj sadržanu drugu oblast g. Ako je E događaj da tačka padne u oblast g kod slučanog bacanja tačke u oblast G, tada je

$$P(E)=\frac{\text{mjera oglasti } g}{\text{mjera oglasti } G}$$

Primjetimo da često mjere oblasti g i G možemo izračunati pomoću integrala.

1. Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 11 i 12 sati, gdje će prvi prijatelj najviše čekati 20 minuta, dok će drugi prijatelj najviše čekati 10 minuta. Naći vjerovatnoću p da će se prijatlji susresti.

2. U kocki ivice a upisana je lopta. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u kocki pripada i upisanoj lopti.

3. U lopti poluprečnika R upisana je kocka. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u lopti pripada i upisanoj kocki?

4. U ravni sa paralelnim pravama na rastojanju $2a$ nasumice je bačena igla dužine 2ℓ ($\ell < a$). Naći vjerovatnoću da je igla presjekla jednu od pravih (ovo je tzv Bifonov problem).

5. Naći vjerovatnoću da korijeni kvadratne jednačine $x^2+2ax+b=0$ budu realni, ako se zna da su vrijednosti koeficijenata a i b jednako vjerovatne i da je $|a|\le m$, $|b|\le n$.

Nezavisni događaji

Za dva događaja E i F kažemo da su nezavisni ako

$$P(EF)=P(E)P(F).$$

Prema jednakosti $P(E|F)=\dfrac{P(EF)}{P(F)}$ ovo povlači da su E i F nezavisni ako $P(E|F)=P(E)$ (što također povlači da je $P(F|E)=P(F)$). To jest, E i F su nezavisni događaji ako znanje da se F pojavilo ne utiče na vjerovatnoću pojavljivanja događaja E. Tj. pojavljivanje događaja E je nezavisno od pojavljivanja događaja F.

Za dva događaja E i F koja nisu nezavisna kažemo da su zavisna.

6. Ako je $P(A)=\dfrac{1}{3}$, $P(B)=\dfrac{3}{4}$ i $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ izračunati

(a) $P(A\cup B)$; (b) $P(B|A)$; (c) Da li su A i B nezavisni događaji? Objasniti!

7. Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Neka je E_1 događaj da je suma dvije bačene kockice 6, a neka je F događaj da je prva kockica jednaka 4. Da li su događaji E_1 i F nezavisni?

8. Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Ako sa E_2 označimo događaj da je suma dvije bačene kockice 7, a sa F događaj da je prva bačena kockica jednaka 4, da li su tada događaji E_2 i F nezavisni?

9. Pretpostavimo da izvlačimo kuglicu iz kutije koja sadrži četiri kuglice sa brojevima 1, 2, 3 i 4. Sa E, F i G označimo sljedeće događaje: $E=\{1,2\}$, $F=\{1,3\}$ i $G=\{1,4\}$. Da li su E, F i G parno nezavisni događaji?

Bajesova formula

Neka su E i F događaji. Događaj E možemo napisati kao

$$E=EF\cup EF^C$$

zato što, da bi tačka bila u E, ona mora ili biti u E i F ili mora biti u E ali ne u F. Kako su EF i EF^C međusobno isključivi, imamo da

$$P(E)=P(EF)+P(EF^C)=P(E|F)P(F)+P(E|F^C)P(F^C).$$

Bejesova formula glasi

$$P(F_j|E)=\frac{P(EF_j)}{P(E)}=\frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(E|F_i)P(F_i)}.$$

10. Posmatrajmo dva šešira koja sadrže kuglice. Prvi šešir sadrži dvije bijele i sedam crnih kuglica, a drugi šešir sadrži pet bijelih i šest crnih kuglica. Bacamo novčić i u zavisnosti od izlaza pisma ili glave izvlačimo kuglicu iz prvog ili drugog šešira. Kolika je uslovna vjerovatnoća da je novčić pokazao glavu ako nam je poznato da smo izvukli bijelu kuglicu.

11. U odgovaranju na pitanja koja imaju višestruke odgovore na testu student ili zna odgovor ili pogađa odgovor. Neka je p vjerovatnoća da student zna odgovor a $1-p$ vjerovatnoća da student ne zna odgovor. Pretpostavimo da student koji pogađa odgovor će tačno pogoditi sa vjerovatnoćom $\frac{1}{m}$, gdje je m broj višestrukih-odgovor alternativa. Kolika je uslovna vjerovatnoća da student zna odgovor na pitanje ako je dato da je odgovorio tačno?

12. Laboratorijski test krvi je 95% efikasan u otkrivanju određene bolesti kada je, u stvari, ta bolest prisutna. Ali, sa druge strane, test također daje „pogrešan pozitivan“ rezultat za 1% testiranih osoba koje su zdrave. (Tj. ako se zdrava osoba testira, tada, sa vjerovatnoćom od $0,01$ test kao rezultat daje da osoba ima datu bolest.) Ako $0,5$ postotaka populacije zaista ima datu bolest, kolika je vjerovatnoća da osoba ima datu bolest, ako nam je dato da je rezultat testa pozitivan.

13. Pretpostavimo da imate tri sandučića u koje možete dobiti pismo. Znate da jedno pismo ovih dana mora doći i da može biti u bilo kojem od tri data sandučića. Neka je α_i vjerovatnoća da ćete pronaći svoje pismo brzim pregledom sandučića i ($i=1,2,3$) ako je pismo stiglo. (Možemo pretpostaviti da je $\alpha_i<1$.) Pretpostavimo da ste nabrzinu pretražili sandučić 1 i da niste našli pismo. Kolika je vjerovatnoća da je pismo u sandučiću 1?

Geometrijska vjerovatnoća

Geometrijsku vjerovatnoću koristimo na slučaj kada imamo neprebrojivo beskonačno mnogo ishoda.

Na primjer, pretpostavimo da imamo na pravoj, u ravni ili prostoru, neku oblast G i u njoj sadržanu drugu oblast g.

Ako je E događaj da tačka padne u oblast g kod slučajnog bacanja tačke u oblast G, tada je

$$P(E) = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

gdje $mes(*)$ označava mjeru date oblasti.

Primjetimo da često mjere oblasti g i G možemo izračunati pomoću integrala.

Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 11 i 12 sati, gdje će prvi prijatelj najviše čekati 20 minuta, dok će drugi prijatelj najviše čekati 10 minuta. Nađi vjerovatnoću p da će se prijatelji susresti.

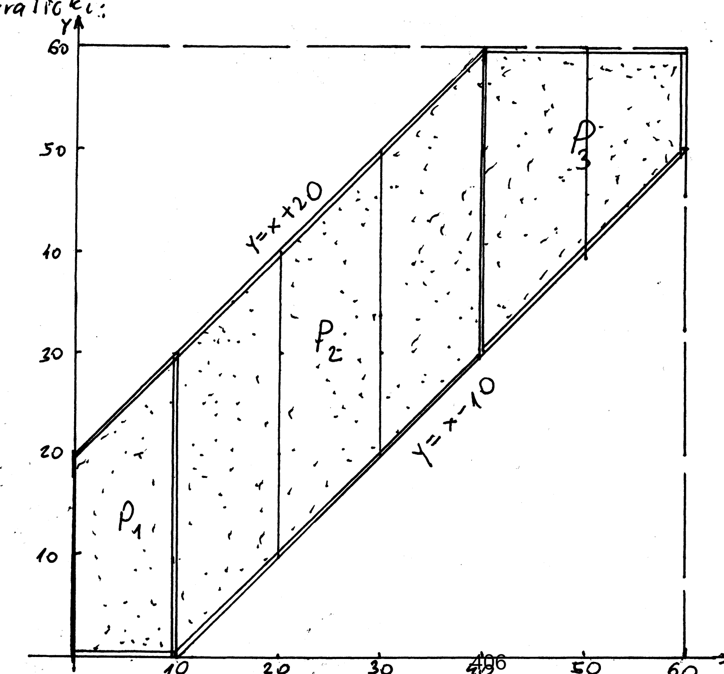
Rj.

Sa x označimo minute dolaska prvog prijatelja a sa y minute dolaska drugog prijatelja. Tako npr. ako je $x=10$ to znači da je prvi prijatelj došao u 11:10, a ako je $x=20$, $y=25$ to znači da je prvi prijatelj došao u 11:20 a drugi prijatelj došao u 11:25.

Posmatrajmo sljedećih nekoliko slučajeva

$x=0 \Rightarrow$	$0 \le y \le 20$	$x=30 \Rightarrow$	$20 \le y \le 50$
$x=10 \Rightarrow$	$0 \le y \le 30$	$x=40 \Rightarrow$	$30 \le y \le 60$
$x=20 \Rightarrow$	$10 \le y \le 40$	$x=50 \Rightarrow$	$40 \le y \le 60$

Grafički:



Da bi riješili zadatak trebamo još pronaći površinu istačkanog dijela na slici, kao i površinu cijelog kvadrata. Površina kvadrata je 60^2. Površinu istačkanog dijela ćemo odrediti pomoću

pomoću dvostrukog integrala.

Površina istačkanog dijela = $P_1+P_2+P_3$

$$P_1=\iint\limits_{D_1} dx\,dy=\int_0^{10}dx\int_0^{x+20}dy=\int_0^{10}(x+20)\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{10}+20x\Big|_0^{10}=250$$

$$P_2=\iint\limits_{D_2} dx\,dy=\int_{10}^{40}dx\int_{x-10}^{x+20}dy=\int_{10}^{40}30\,dx=30\cdot x\Big|_{10}^{40}=900$$

$$P_3=\iint\limits_{D_3} dx\,dy=\int_{40}^{60}dx\int_{x-10}^{60}dy=\int_{40}^{60}(70-x)\,dx=70\cdot x\Big|_{40}^{60}-\frac{1}{2}x^2\Big|_{40}^{60}=400$$

Tražena vjerovatnoća je

$$p=\frac{250+900+400}{60^2}=\frac{1550}{3600}=\frac{155}{360}=\frac{31}{72}\approx 0{,}4306$$

#) U kocki ivice a upisana je lopta. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u kocki pripada i upisanoj lopti.

Rj.

Ako je lopta upisana u kocku, njen poluprečnik je jednak polovini ivice kocke tj. $R=\frac{a}{2}$. Neka je D događaj "da slučajno izabrana tačka kocke pripada i lopti". Broj tačaka koje su u kocki ili u lopti je beskonačan, pa ćemo kao mjeru tih prostora koristiti zapremine tih tijela, tj.

$$P(D)=\frac{V_{lopte}}{V_{kocke}}=\frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3}=\frac{\pi}{6}\approx 0{,}5236$$

U lopti poluprečnika R upisana je kocka. Kolika je vjerovatnoća da slučajno odabrana tačka u lopti pripada i upisanoj kocki?

Rj:

Ako je kocka upisana u loptu, njena dijagonala je jednaka prečniku lopte tj. $D=2R$.
Dijagonala kocke se računa pomoću ivice na sljedeći način $D=a\sqrt{3}$ pa je

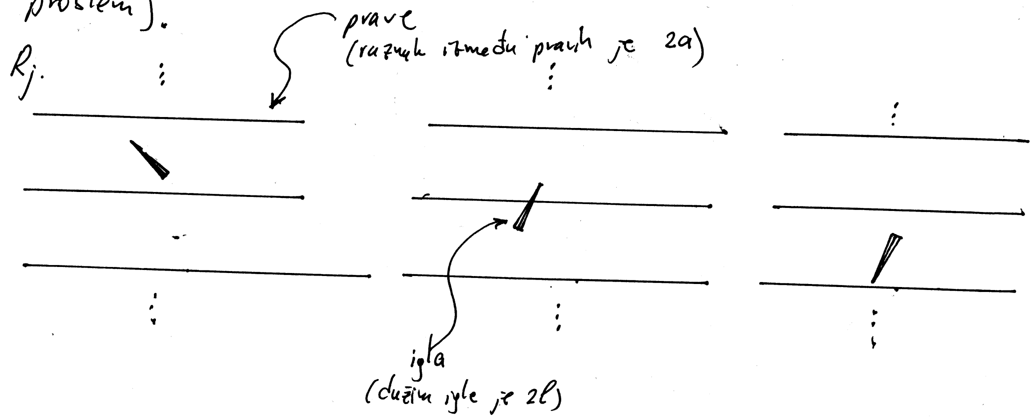
$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Označimo sa E događaj "da slučajno izabrana tačka lopte pripada i kocki".
Broj tačaka koje su u kocki ili u lopti je beskonačan, pa ćemo kao mjeru tih prostora koristiti zapremine tih tijela.
Tada se vjerovatnoća izražava kao količnik zapremine ta dva tijela tj.

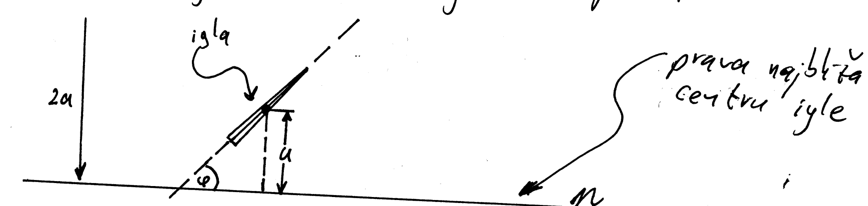
$$P(E) = \frac{V_{kocke}}{V_{lopte}} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,3674$$

U ravni sa paralelnim pravima na rastojanju $2a$ nasumice je bačena igla dužine $2l$ ($l<a$). Nađi vjerovatnoću da je igla presjekla jednu od pravih (ovo je tzv Bifonov problem).

Rj.



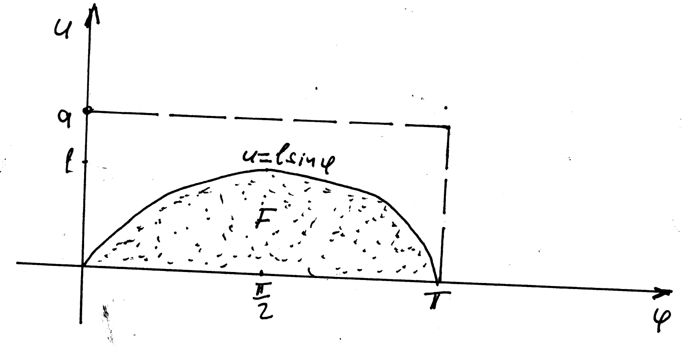
Najprije ustanovimo šta je prostor elementarnih događaja u ovom problemu.
Primjetimo da je centar (sredina) igle jednoznačno određen pa neka je u rastojanje centra igle od najbliže prave, a sa φ označimo ugao između igle i te prave.



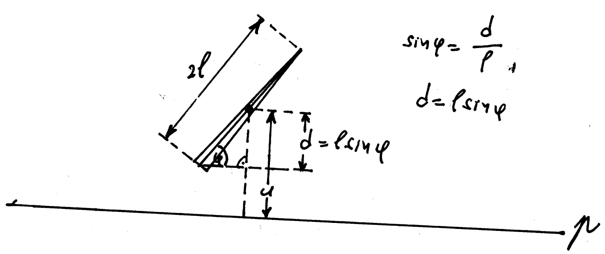
Par (φ, u) određuje položaj igle sa tačnošću do izbora konkretne prave. Kako nas interesuje uzajamni položaj igle i najbliže prave, to sve prave možemo zanemariti, pa za prostor elementarnih događaja uzeti skup

$$E = \{(\varphi, u) \mid 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le u \le a\}$$

Prikažimo ovaj skup E u pravougaonom koordinatnom sistemu, gdje ćemo umjesto x-ose uzeti φ a za y-osu uzeti u.



Kada imamo presjek igle i prave?



$\sin\varphi = \frac{d}{l}$,

$d = l\sin\varphi$

Presjek igle i prave imamo ako i samo ako je $u \le l\sin\varphi$ (vidi sliku iznad). Na taj način događaj koji nas zanima određen je skupom

$$F = \{(\varphi, u) \mid u \le l\sin\varphi\}$$

(nacrtajmo ovaj skup u pravougaonom koordinatnom sistemu). Inače tražena vjerovatnoća p posmatranog događaja je odnos površina skupova F i E. Kako je

$$P_{skupa\,F} = \int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = 2l, \quad P_{skupa\,E} = a\pi$$

to konačno imamo $p = \frac{2l}{a\pi}$ tražena vjerovatnoća.

(#) Naći vjerovatnoću da korijeni kvadratne jednačine $x^2 + 2ax + b = 0$ budu realni, ako se zna da su vrijednosti koeficijenata a i b jednakovjerovatne i $|a| \le m$, $|b| \le n$.

Rj:

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

$$D = 4a^2 - 4b$$

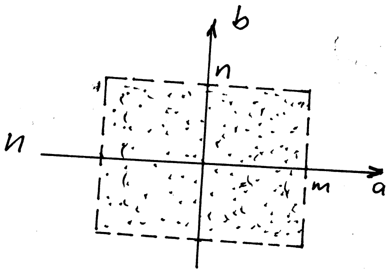
za $D \ge 0$ kvadratna jednačina ima realne korijene.

U našem slučaju $4a^2 - 4b \ge 0$

$$a^2 - b \ge 0$$

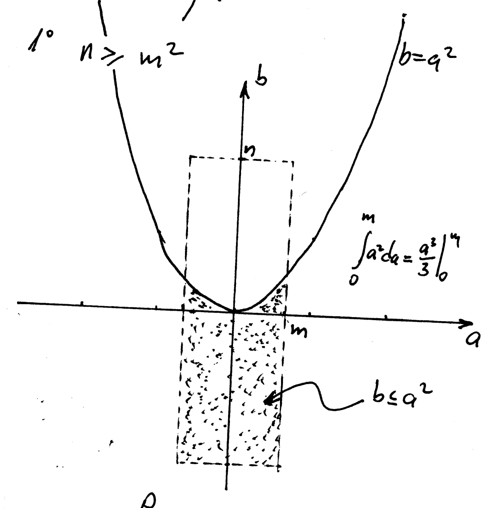
$$a^2 \ge b$$

Prikažimo grafički skup $|a| \le m$, $|b| \le n$



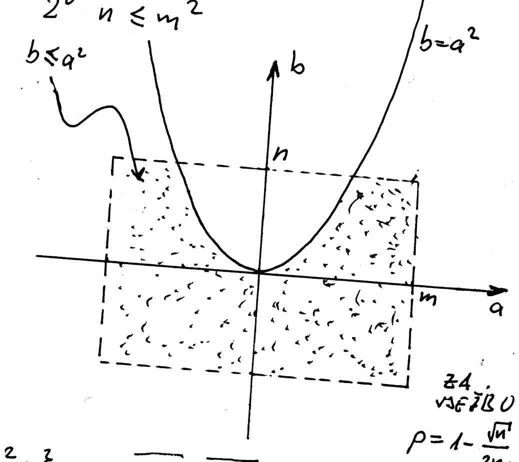
Kod crtanja parabole $b = a^2$ razlikujemo dva slučaja

1° $n \ge m^2$



$\int_0^m a^2\,da = \frac{a^3}{3}\Big|_0^m$

2° $n \le m^2$



$$p = \frac{P_{dijela\ pravougaonika\ ispod\ krive}}{P_{pravougaonika}} = \frac{2mn + \frac{2}{3}m^2}{4mn} = \frac{1}{2} + \frac{m^2}{6n}$$ tražena vjerovatnoća za 1°.

ZA VJEŽBU

$p = 1 - \frac{\sqrt{n}}{3m}$ vjerov. za 2°

[51] *Marko putuje od mesta A do mesta C, preko mesta B, konstantnom brzinom. Razdaljina od mesta A do mesta B je $30km$, a razdaljina od mesta B do mesta C je $10km$. U slučajnom trenutku tokom putovanja ga na mobilni telefon zove prijatelj da proveri kada će Marko stići u mesto C. Izračunati verovatnoću da će Marko moći prijatelju da kaže da je već prošao mesto B.*

Rešenje: Prostor događaja možemo opisati na kao $\Omega = [0, 40] = \{x \,|\, 0 \leq x \leq 40\}$, gde je x razdaljina koju je Marko prešao od početka putovanja do trenutka telefonskog poziva. Pošto ga prijatelj zove tokom putovanja, ukupno rastojanje koje je Marko prešao do trenutka poziva je najviše $30km + 10km = 40km$. Događaj X: „*Marko će moći prijatelju da kaže da je već prošao mesto B*" možemo predstaviti kao skup $X = [30, 40] = \{x \,|\, 30 \leq x \leq 40\} \subseteq \Omega$.

Svi elementarni ishodi $x \in \Omega$ su jednakoverovatni (jer Marko poziv dobija poziv u slučajnom trenutku), ali se zadatak ne može rešiti na isti način kao npr. zadatak [31] (vidi Laplasovu definiciju verovatnoće) jer broj elementarnih ishoda nije konačan. Naime, i skup Ω i skup X su beskonačni skupovi. Zadatak može da se reši primenom geometrijske definicije verovatnoće jer prostor Ω možemo predstaviti kao duž AC koja je dužine $m(\Omega) = 40$ (merna jedinica nam je kilometar), a događaju X odgovara duž BC koja je dužine $m(X) = 10$. Kako su zadovoljeni svi uslovi za primenu (1.19), sledi

$$\mathsf{P}(X) = \tfrac{m(X)}{m(\Omega)} = \tfrac{10}{40} = \tfrac{1}{4} = 0.25.$$

---

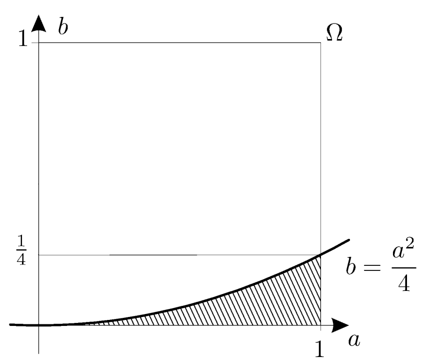
[53] *Na slučajan način se biraju brojevi a i b iz intervala $[0, 1]$. Izračunati verovatnoću da će jednačina $x^2 + ax + b = 0$ imati realna rešenja po nepoznatoj x.*

Rešenje:

Kao što je poznato, kvadratna jednačina ima realna rešenja ukoliko je njena diskriminanta nenegativna, te posmatrana jednačina ima realna rešenja ukoliko je $a^2 - 4b \geq 0$, tj. ako je $b \leq \frac{1}{4}a^2$.

Jedan elementarni ishod možemo predstaviti kao uređeni par $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$, te se skup svih elementarnih ishoda $\Omega = \{(a, b) \,|\, 0 \leq a \leq 1 \wedge 0 \leq b \leq 1\}$ može predstaviti u ravni kao kvadrat sa temenima u tačkama $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(1, 0)$. Ovaj kvadrat je površine $m(\Omega) = 1$. Događaju R: „*rešenja jednačine su realni brojevi*" odgovara tada oblast $R = \{(a, b) \in \Omega \,|\, b \leq \frac{1}{4}a^2\}$ (vidi sliku). Površinu ove oblasti možemo izračunati korišćenjem intergralnog računa:

$$m(R) = \int_0^1 \frac{1}{4}a^2 da = \frac{1}{4}\frac{a^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$



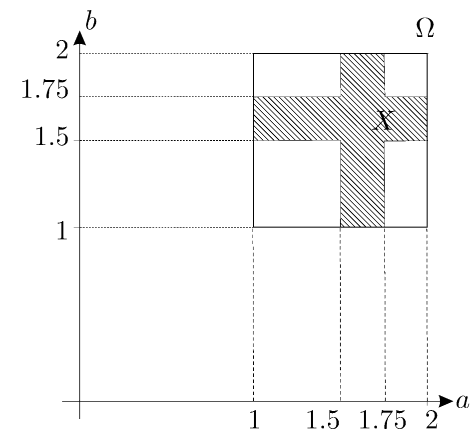
Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se brojevi a i b biraju na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(R) = \frac{m(R)}{m(\Omega)} = \frac{1}{12} \approx 0.0833.$$

[52] *Autobus stiže u stanicu u $1:30$ časova, a odlazi u $2:45$. Ana i branko dolaze na stanicu u slučajnim trenucima (svako za sebe) između $1:00$ i $2:00$. Svako od njih ulazi u autobus ako je došao u trenutku kada je autobus u stanici, a inače odlaze (npr. odustaju od putovanja). Izračunati verovatnoću da će se bar jedna od navedenih osoba naći u autobusu.*

Rešenje:

Jedan elementarni ishod možemo predstaviti kao uređeni par $(a, b) \in [1, 2] \times [1, 2]$ gde a i b redom predstavljaju vremena kada su Ana odnosno Branko stigli na stanicu, te se skup svih elementarnih ishoda $\Omega = \{(a, b) \,|\, 1 \leq a \leq 2 \,\wedge\, 1 \leq b \leq 2\}$ može predstaviti u ravni kao kvadrat sa temenima u tačkama $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ i $(1, 2)$ (merna jedinica nam je jedan sat). Ovaj kvadrat je površine $m(\Omega) = 1$. Događaju X: „*bar jedna od navedenih osoba će se naći u autobusu*" odgovara tada u ravni oblast $X = \{(a, b) \in \Omega \,|\, 1.5 \leq a \leq 1.75 \,\vee\, 1.5 \leq b \leq 1.75\}$ (vidi sliku). Oblast X površine $m(X) = 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.4375$.



Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se brojevi a i b biraju na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(X) = \frac{m(X)}{m(\Omega)} = 0.4375.$$

---

[54] *Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka iz lopte. Izračunati verovatnoću da će biti izabrana tačka iz kocke.*

Rešenje: Skup elementarnih ishoda možemo predstaviti kao skup L tačaka lopte, a događaju K: „*izabrana tačka pripada kocki*" odgovara tada skup K tačaka kocke. Ako je ivica kocke dužine a, tada je poluprečnik r lopte jednak polovini telesne dijagonale kocke, tj. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Zapremina lopte je

$$m(L) = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi,$$

a zapremina kocke je $m(K) = a^3$. Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se tačka bira na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(K) = \frac{m(K)}{m(L)} = \frac{a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 0.3676.$$

Nezavisni događaji

Za dva događaja E i F kažemo da su nezavisni ako

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

Prema jednakosti $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$ ovo povlači da su E i F nezavisni ako

$$P(E|F) = P(E)$$

(što također povlači da je $P(F|E) = P(F)$). Tj. E i F su nezavisni događaji ako znanje da je se F pojavilo ne utiče na vjerovatnoću pojavljivanja događaja E. Tj. pojavljivanje događaja E je nezavisno od pojavljivanja događaja F.

Za dva događaja E i F koja nisu nezavisna kažemo da su zavisna.

\# Ako je $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{3}{4}$ i $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ izračunati

(a) $P(A \cup B)$

(b) $P(B|A)$

(c) Da li su A i B nezavisni događaji? Objasniti!

Rj.

$A \cap B$ smo označavali sa AB, time je $P(AB) = \frac{1}{6}$

(a)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

(b)
$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

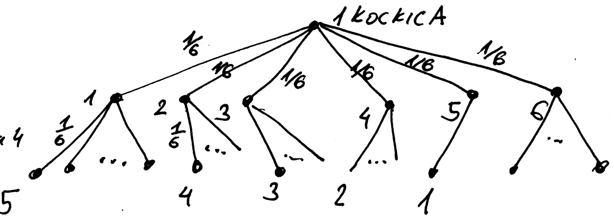
(c) S obzirom da je

$$P(A) \cdot P(B) \neq P(AB) \qquad \left(P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4},\ P(AB) = \frac{1}{6} \right)$$

zaključujemo da događaji A i B nisu nezavisni.

(#) Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Neka je E_1 događaj da je suma dvije bačene kockice 6, a neka je F događaj da je prva kockica jednaka 4. Da li su događaji E_1 i F nezavisni?

Rj. $P(F)=\frac{1}{6}$



E_1F - događaj da je suma dvije bačene kockice 6 gdje je prva kockica 4

$$P(E_1F)=\frac{1}{36}$$

$$P(E_1)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$$

$$P(E_1)\cdot P(F)=\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$$

Kako je $P(E_1F)\neq P(E_1)P(F)$ to su događaji E_1 i F zavisni događaji

(#) Pretpostavimo da bacamo dvije obične kockice. Ako sa E_2 označimo događaj da je suma dvije bačene kockice 7, a sa F događaj da je prva bačena kockica jednaka 4, da li su tada događaji E_2 i F nezavisni.

Rj. $P(F)=\frac{1}{6}$, $P(E_2)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$$P(E_2F)=\frac{1}{36}\qquad P(E_2)\cdot P(F)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Kako je $P(E_2F)=P(E_2)P(F)$ događaji E_2 i F su nezavisni događaji.

Definicija nezavisnosti događaja se može proširiti na više od dva događaja. Za događaje $E_1, E_2, \dots, E_n$ kažemo da su nezavisni ako za svaki podskup $E_{1'}, E_{2'}, \dots, E_{r'}$, $r\le n$, ovih događaja vrijedi

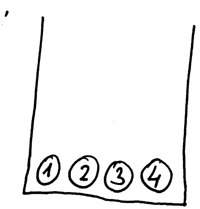
$$P(E_{1'}E_{2'}\dots E_{r'})=P(E_{1'})P(E_{2'})\dots P(E_{r'})$$

Intuitivno, događaji $E_1, E_2, \dots, E_n$ su nezavisni ako znanje o pojavljivanju bilo kojeg od ovih događaja ne utiče na vjerovatnoću bilo kojeg drugog događaja

(#) (PARNO NEZAVISNI DOGAĐAJI KOJI NISU NEZAVISNI)

Pretpostavimo da izvlačimo kuglicu iz kutije koja sadrži četiri kuglice sa brojevima 1, 2, 3 i 4. Sa E, F i G označimo sljedeće događaje: $E=\{1,2\}$, $F=\{1,3\}$ i $G=\{1,4\}$. Da li su E, F i G nezavisni događaji? Da li su E, F i G parno nezavisni događaji?

Rj.



$$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=\frac{1}{4}$$

$$P(E)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(F)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(G)=\frac{1}{2}$$

$$EF=\{1\},\quad EG=\{1\},\quad FG=\{1\}$$

$$P(EF)=P(E)P(F)=\frac{1}{4}$$
$$P(EG)=P(E)P(G)=\frac{1}{4}$$
$$P(FG)=P(F)P(G)=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ E, F i G su parno nezavisni događaji

$EFG=\{1\}$

$$\frac{1}{4}=P(EFG)\neq P(E)P(F)P(G)=\frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ E, F i G nisu nezavisni događaji

Bajes-ova formula

Neka su E i F događaji. Događaj E možemo napisati kao

$$E = EF \cup EF^c$$

zato što, da bi tačka bila u E, ona mora ili biti u E i F ili mora biti u E ali ne u F. Kako su EF i EF^c međusobno isključivi, imamo da

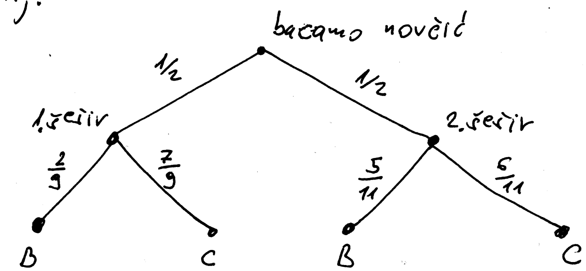
$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)(1-P(F)) \end{aligned}$$

Zadnja jednakost tvrdi da je vjerovatnoća događaja E jednaka prosječnoj težini uslovne vjerovatnoće od E ako je poznato da je se pojavilo F i uslovne vjerovatnoće od E ako je dato da se F nije pojavilo, gdje je svaka uslovna vjerovatnoća data kao što veća težina kao događaji na kojima se uslov pojavljuje.

$$\underline{P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}$$

Posmatrajmo dva šešira koja sadrže kuglice. Prvi šešir sadrži dvije bijele i sedam crnih kuglica, a drugi šešir sadrži pet bijelih i šest crnih kuglica. Bacamo novčić i u zavisnosti od izlaza pisma ili glave izvlačimo kuglicu iz prvog ili drugog šešira. Kolika je uslovna vjerovatnoća da je novčić pokazao glavu ako nam je poznato da smo izvukli bijelu kuglicu.

Rj.



Sa H i W označimo sljedeće događaje:

H: "Novčić je pokazao glavu."

W: "Izvučena je bijela kuglica."

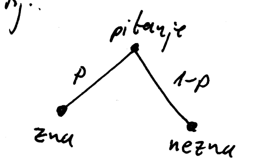
Željena vjerovatnoća je $P(H|W)$ koju ćemo izračunati na sljedeći način.

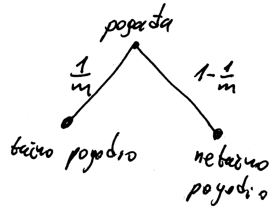
$$P(H|W) = \frac{P(HW)}{P(W)} = \frac{P(W|H)P(H)}{P(W)} = \frac{P(W|H)P(H)}{P(W|H)P(H) + P(W|H^c)P(H^c)};$$

$$= \frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{11}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{22}{67}$$

(#) U odgovaranju na pitanja koja imaju mnogostruke odgovore na testu student ili zna odgovor ili pogađa odgovor. Neka je p vjerovatnoća da student zna odgovor a $1-p$ vjerovatnoća da student nezna odgovor. Pretpostavimo da student koji pogađa odgovor će tačno pogoditi sa vjerovatnoćom $\frac{1}{m}$, gdje je m broj višestrukih-odgovor alternativa. Kolika je uslovna vjerovatnoća da student zna odgovor na pitanje ako je dato da je odgovorio tačno?

Rj.:





Sa C i K označimo sljedeće događaje

C: "Student je odgovorio tačno na postavljeno pitanje."

K: "Student zna odgovor na pitanje".

Nama treba $P(K|C)$.

$$P(K|C) = \frac{P(KC)}{P(C)} = \frac{P(C|K)\,P(K)}{P(C|K)P(K) + P(C|K^c)\,P(K^c)} =$$

$$= \frac{1\cdot p}{1\cdot p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

Time, na primjer, ako je $m=5$, $p=\frac{1}{2}$, tada vjerovatnoća da student zna odgovor na pitanje koje je odgovorio tačno je $\frac{5}{6}$.

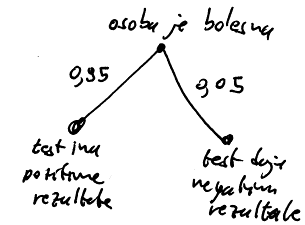
(#) Laboratorijski test krvi je 95% efikasan u otkrivanju određene bolesti kada je, u stvari, ta bolest prisutna. Ali, sa druge strane, test takođe daje "pogrešne pozitivne" rezultate za 1% testiranih osoba koje su zdrave. (Tj. ako se zdrava osoba testira, tada, sa vjerovatnoćom od 0,01 test kao rezultat daje da osoba ima tu bolest.) Ako 0,5 postotaka populacije zaista ima datu bolest, kolika je vjerovatnoća da osoba ima datu bolest, ako nam je dato da je rezultat testa pozitivan?

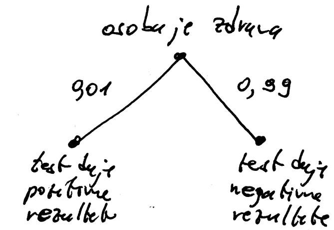
Rj.

Sa D i E označimo sljedeće događaje

D: "Testirana osoba ima bolest"

E: "Rezultati testa su pozitivni"   Tražimo $P(D|E)$





$$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(E|D)\,P(D)}{P(E|D)\,P(D) + P(E|D^c)\,P(D^c)} =$$

$$= \frac{0{,}95\cdot 0{,}005}{0{,}95\cdot 0{,}005 + 0{,}01\cdot 0{,}995} = \frac{95}{294} \approx 0{,}323$$

Time, samo 32% onih osoba čiji je test dao pozitivne rezultate zaista imaju datu bolest.

Jednakost $P(E)=P(E|F)P(F)+P(E|F^c)P(F^c)$ se može poopštiti na sljedeći način. Pretpostavimo da su $F_1, F_2, \dots, F_n$ međusobno isključivi događaji takvi da $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$. Drugim riječima, tačno jedan od događaja $F_1, F_2, \dots, F_n$ će se pojaviti. Pišući

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} EF_i$$

i koristeći činjenicu da su događaji EF_i, $i=1,2,\dots,n$ međusobno isključivi, dobijamo da

$$P(E)=\sum_{i=1}^{n} P(EF_i)=\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i) \qquad \dots (*)$$

Time, jednakost $(*)$ pokazuje kako, za date događaje $F_1, F_2, \dots, F_n$ od kojih jedan i samo jedan se mora pojaviti, možemo izračunati $P(E)$ tako što ćemo prvo "uslovit" koji od F_i bi se mogao pojaviti. Tj. tvrdnja tvrdi da je $P(E)$ jednak prosječnoj težini od $P(E|F_i)$, gdje je težina člana određena vjerovatnoćom događaja na kojem je postavljen uslov.

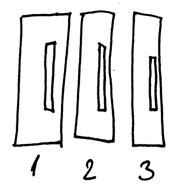
Pretpostavimo sada da je se E pojavilo i da nas zanima koji od F_j se također pojavio. Prema jednakosti $(*)$ imamo

$$\boxed{P(F_j|E)=\frac{P(EF_j)}{P(E)}=\frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}}$$

Zadnja jednakost je poznata kao Bejes-ova formula,

Pretpostavimo da imate tri sandučića u koje možete dobiti pismo. Znate da jedno pismo ovih dana mora doći i da može biti u bilo kojem od tri data sandučića. Neka je α_i vjerovatnoća da ćete pronaći svoje pismo brzim pregledom sandučića i $(i=1,2,3)$ ako je pismo stiglo. (Možemo pretpostaviti da je $\alpha_i<1$.) Pretpostavimo da ste nabrzinu pretražili sandučić 1 i da niste našli pismo. Kolika je vjerovatnoća da je pismo u sandučiću 1?

Rj.:



Neka su:

F_1 događaj da je pismo u sandučiću 1;

F_2 događaj da je pismo u sandučiću 2;

F_3 događaj da je pismo u sandučiću 3;

E događaj da smo pretražili sandučić 1 i da nismo našli pismo.

Trebamo odrediti $P(F_1|E)$.

Primjetimo da $P(F_1)=\frac{1}{3}$, $P(F_2)=\frac{1}{3}$, $P(F_3)=\frac{1}{3}$

$P(E|F_1)=1-\alpha_1$, $P(E|F_2)=1$, $P(E|F_3)=1$

Primjenom Bajesove formule imamo

$$P(F_1|E)=\frac{P(E|F_1)P(F_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|F_i)P(F_i)}=$$

$$=\frac{(1-\alpha_1)\frac{1}{3}}{(1-\alpha_1)\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}$$

[56] *U kutiji se nalaze 3 obična novčića i jedan defektni novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.*

(b) *Ako je oba puta pao grb, koliko iznosi verovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?*

Rešenje: Označimo događaje:

H_1 - „*iz kutije je izabran ispravan novčić*”,
H_2 - „*iz kutije je izabran novčić sa grbom na obe strane*”,
A - „*pri bacanju novčića će oba puta pasti grb*”,
A_1 - „*pri prvom bacanju novčića će pasti grb*”,
A_2 - „*pri drugom bacanju novčića će pasti grb*”.

(a) Očigledno je $\{H_1, H_2\}$ potpun sistem događaja[1] ($H_1H_2 = \emptyset$ i $H_1 + H_2 = \Omega$), i primenom (1.18) se dobija $\mathsf{P}(H_1) = \frac{3}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{4}$. Događaj A može se predstaviti kao $A = A_1A_2$, i na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2) =$

$= \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A_1A_2|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A_1A_2|H_2)$

gde je

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_i) = \frac{\mathsf{P}(A_1A_2H_i)}{\mathsf{P}(H_i)} = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A_1|H_i)\,\mathsf{P}(A_2|H_iA_1)}{\mathsf{P}(H_i)} = \mathsf{P}(A_1|H_i)\,\mathsf{P}(A_2|H_iA_1)$, $i \in \{1,2\}$,

odnosno

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_1) = \mathsf{P}(A_1|H_1)\,\mathsf{P}(A_2|H_1A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_2) = \mathsf{P}(A_1|H_2)\,\mathsf{P}(A_2|H_2A_1) = 1 \cdot 1 = 1$,

te je

$$\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{7}{16}\,.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) se dobija

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}\,.$$

---

[62] *Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Ako je izvučena tref karta, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 3 crne kuglice, a u ostalim slučajevima, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 4 bele i 1 crna kuglica.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će biti izvučene kuglice istih boja.*

(b) *Ako se zna da su izvučene kuglice različitih boja, izračunati verovatnoću da je izvučena tref karta.*

[1] Zapravo je $H_2 = \overline{H}_1$.

Rešenje: U špilu od 52 karte je 13 tref karata i 39 karata koje nisu tref. $\mathsf{P}(H_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$, gde je sa H_1 označen događaj „*iz špila je izvučena tref karta*” i $H_2 = \overline{H_1}$. Posmatramo događaj A–„*izvučene su kuglice iste boje*”. Događaj A se realizuje ako se iz kutije izvuku 2 bele ili 2 crne kuglice.

(a) Uvrštavanjem

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} \qquad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

u formulu totalne verovatnoće (1.16) dobija se

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{10} = \frac{11}{20}.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}\left(H_1|\overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(\overline{A}|H_1)}{\mathsf{P}(\overline{A})} = \frac{\mathsf{P}(H_1)(1-\mathsf{P}(A|H_1))}{1-\mathsf{P}(A)} = \frac{1}{3}.$$

---

[57] *U tri magacina se nalaze mašinski strugovi, i to:*

magacin 1: 10 *strugova, od čega* 4 *neispravna,*
magacin 2: 6 *strugova, od čega* 1 *neispravna,*
magacin 3: 8 *strugova, od čega* 3 *neispravna.*

Iz slučajno odabranog magacina se nasumice odabira jedan strug.

(a) *Izračunati verovatnoću da će odabrani strug biti neispravan.*

(b) *Izračunati verovatnoću da je odabrani strug iz magacina* 2 *ako se zna da je taj strug ispravan.*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani strug je neispravan*”,
H_i - „*odabrani strug potiče iz magacina* $i \in \{1,2,3\}$”.

(a) Očigledno je $\{H_1, H_2, H_3\}$ potpun sistem događaja, i primenom (1.18) (magacin se bira na slučajan način) se dobija $\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{3}$, $i \in \{1,2,3\}$, a koristeći navedene podatake o broju neispravnih i ukupnom broju strugova koji su raspoređeni po pojedinim magacinama se primenom (1.18) dobija $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(A|H_3) = \frac{3}{8}$.

Na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A|H_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360} \approx 0.3139\,.$$

(b) Koristeći $\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A) = \frac{247}{360} \approx 0.6861$ i $\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_2\right) \overset{(1.3)}{=} 1 - \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{5}{6}$, primenom Bajesove formule (1.17) se dobija

$$\mathsf{P}\left(H_2|\overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_2\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{247}{360}} = \frac{100}{247} \approx 0.4049\,.$$

[58] *Prva kutija sadrži 5 crvenih i 6 belih kuglica, a druga kutija sadrži 4 crvene i 4 bele kuglice. Iz prve kutije se nasumice izvlači jedna kuglica i premešta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.*

(b) *Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premeštena crvena kuglica?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*iz druge kutije će se izvući crvena kuglica*",
H_c - „*iz prve u drugu kutiju je premeštena crvena kuglica*",
H_b - „*iz prve u drugu kutiju je premeštena bela kuglica*".

(a) $\{H_c, H_b\}$ je potpun sistem događaja, i primenom (1.18) (kuglica se iz prve kutije bira na slučajan način) dobija se $\mathsf{P}(H_c) = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$ i $\mathsf{P}(H_b) = \frac{6}{11}$. Koristeći podatake o sadržaju druge kutije u zavisnosti od toga da li je u nju iz prve kutije premeštena crvena ili bela kuglica se primenom (1.18) dobija

$\mathsf{P}(A|H_c) = \frac{4+1}{4+4+1} = \frac{5}{9}, \quad \mathsf{P}(A|H_b) = \frac{4+0}{4+4+1} = \frac{4}{9}.$

Na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_c)\,\mathsf{P}(A|H_c) + \mathsf{P}(H_b)\,\mathsf{P}(A|H_b) = \frac{5}{11}\cdot\frac{5}{9} + \frac{6}{11}\cdot\frac{4}{9} = \frac{49}{99} \approx 0.4949\,.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}(H_c|A) = \frac{\mathsf{P}(H_c)\,\mathsf{P}(A|H_c)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{49}{99}} = \frac{25}{49} \approx 0.5102\,.$$

---

[59] *Od ukupne proizvodnje jedne zanatske radionice, 50% se proizvodi na mašini M_1, 20% na mašini M_2, i 30% na mašini M_3. Na mašini M_1 se u proseku napravi 3% neispravnih proizvoda (škarta), na mašini M_2 u proseku 5%, a na mašini M_3 u proseku 4% neispravnih proizvoda. Na slučajan način se bira jedan proizvod iz posmatrane radionice.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će odabrani proizvod biti ispravan.*

(b) *Ako je odabrani proizvod ispravan, koliko iznosi verovatnoća da je on proizveden na mašini M_3?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani proizvod će biti ispravan*",
H_i - „*odabrani proizvod je proizveden na mašini M_i, $i \in \{1,2,3\}$*".

Analogno kao u zadacima [56], [57], [58], rezultati se mogu dobiti primenom formule totalne verovatnoće (1.16) i Bajesove formule (1.17):

(a) $\mathsf{P}(H_1) = \frac{50}{100}, \quad \mathsf{P}(H_2) = \frac{20}{100}, \quad \mathsf{P}(H_3) = \frac{30}{100},$
$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{100-3}{100} = \frac{97}{100}, \quad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{100-5}{100} = \frac{95}{100}, \quad \mathsf{P}(A|H_3) = \frac{100-4}{100} = \frac{96}{100},$

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A|H_i) = \frac{50}{100}\cdot\frac{97}{100} + \frac{20}{100}\cdot\frac{95}{100} + \frac{30}{100}\cdot\frac{96}{100} = 0.963\,.$$

(b) $$\mathsf{P}(H_3|A) = \frac{\mathsf{P}(H_3)\,\mathsf{P}(A|H_3)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{30}{100}\cdot\frac{96}{100}}{\frac{963}{1000}} = \frac{288}{963} \approx 0.2991\,.$$

[60] *Proizvod izrađen u jednoj radionici kontroliše jedan od dva kontrolora. Verovatnoće da će proizvod na kontrolu stići kod prvog odnosno drugog kontrolora redom iznose 0.6 odnosno 0.4. Verovatnoća da će proizvod proći kao proizvod koji zadovoljava standarde kod prvog kontrolora iznosi 0.94, a kod drugog 0.98. Ako je jedan slučajno odabrani proizvod priznat kao proizvod koji zadovoljava standarde, koliko iznosi verovatnoća da ga je kontrolisao prvi kontrolor?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani proizvod je zadovoljio kriterijume kontrolora*",
H_i - „*odabrani proizvod je kontrolisao i-ti kontrolor, $i \in \{1,2\}$*".

Analogno zadacima [56], [57], [58], [59], rezultati se mogu dobiti primenom Bajesove formule (1.17):

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)}\,,$$

pri čemu se $\mathsf{P}(A)$ može izračunati primenom formule totalne verovatnoće (1.16):

$\mathsf{P}(H_1) = 0.6, \quad \mathsf{P}(H_2) = 0.4,$
$\mathsf{P}(A|H_1) = 0.94, \quad \mathsf{P}(A|H_2) = 0.98,$
$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2).$

Dakle,

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)} = \frac{0.6\cdot 0.94}{0.6\cdot 0.94 + 0.4\cdot 0.98} \approx 0.5900\,.$$

---

[61] *Dinar se baca dva puta. Ako je oba puta pao grb, iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 1 crna kuglica izvlači se dva puta zaredom kuglica sa vraćanjem u kutiju. U ostalim slučajevima izvlači se dva puta zaredom kuglica sa vraćanjem iz kutije u kojoj se nalaze 1 bela i 2 crne kuglice.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će oba puta biti izvučena bela kuglica.*

(b) *Ako je oba puta izvučena bela kuglica izračunati verovatnoću događaja da grb nije pao oba puta.*

Rešenje: Označimo događaje:

H_1 - „*oba puta pao grb*",
H_2 - „*palo bar jedno pismo*",
A - „*izvučene dve bele kuglice*".

Događaji H_1 i H_2 čine potpun sistem događaja i njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{3}{4}$.

(a) Na osnovu uslova zadatka sledi $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ i $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, te primenom formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{9} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{9} = \tfrac{7}{36}.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}(H_2|A) = \tfrac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \tfrac{3}{7}.$$

Slučajne varijable

Slučajne varijable

Često se dešava da u sprovođenju nekog eksperimenta naš glavni interes su neke f-je izlaza, a ne konkretno sam izlaz. Na primjer, u bacanju dvije kockice, obično nas zanima suma dvije kockice i često nismo opterećeni na pojedinačne izlaze kockica. Tj. zanima nas da li je suma sedam a uopšte nam nije bitno da li je izlaz bio $(1,6)$ ili $(2,5)$ ili $(3,4)$ ili $(4,3)$ ili $(5,2)$ ili $(6,1)$. Ove količine interesa, ili formalnije, ove realno vrijednosne f-je definisane na prostoru uzoraka, su poznate kao slučajne varijable.

Kako je vrijednost slučajne varijable određena izlazom eksperimenta, vjerovatnoće možemo pridružiti mogućoj vrijednosti slučajne varijable.

Posmatrajmo eksperiment bacanja dvije obične kockice. Neka X označava slučajnu varijablu koja je definisana kao suma dvije kockice. Drugim riječima slučajna varijabla X može uzeti bilo koji cijeli broj između dva i dvanaest. Izračunati $P\{X=1\}$, $P\{X=2\}$, $P\{X=3\}$, $P\{X=4\}$, $P\{X=5\}$, …, $P\{X=12\}$, $\sum_{n=2}^{12} P\{X=n\}$.

Rj.

$$P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{X=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X=4\} = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X=5\} = P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X=6\} = P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X=7\} = P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = \frac{6}{36}$$

$$P\{X=8\} = P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X=9\} = P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X=10\} = P\{(4,6),(5,5),(6,4)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X=11\} = P\{(5,6),(6,5)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X=12\} = P\{(6,6)\} = \frac{1}{36}$$

$$\sum_{n=2}^{12} P\{X=n\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} + \ldots + P\{X=12\} = 1$$

(#) Posmatrajmo eksperiment bacanja dva obična novčića. Neka Y označava broj glava koje se pojave u eksperimentu. Izračunati $P\{Y=0\}$, $P\{Y=1\}$, $P\{Y=2\}$, $P\{Y=3\}$, $P\{Y=4\}$.

Rj.

Y je slučajna varijabla koja može uzimati vrijednosti 0, 1 i 2. Imamo

T - pismo, H - glava

$$P\{Y=0\} = P\{(T,T)\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y=1\} = P\{(T,H),(H,T)\} = \frac{2}{4}$$

$$P\{Y=2\} = P\{(H,H)\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Y=3\} = 0$$

$$P\{Y=4\} = 0$$

Naravno, vrijedi $P\{Y=0\} + P\{Y=1\} + P\{Y=2\} = 1$.

(#) Posmatrajmo eksperiment bacanja jednog novčića čija je vjerovatnoća pojave glave jednaka p, sve dok se prva glava ne pojavi. Neka je N slučajna varijabla koja označava broj potrebnih bacanja novčića sve dok se prva glava ne pojavi i pretpostavimo da su izlazi uzastopnih bacanja novčića nezavisni. Izračunati $P\{N=1\}$, $P\{N=2\}$, $P\{N=3\}$, $\ldots$, $P\{N=n\}$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{N=n\}\right)$.

Rj.

H - glava, T - pismo

$$P\{N=1\} = P\{H\} = p$$

$$P\{N=2\} = P\{(T,H)\} = (1-p)p$$

$$P\{N=3\} = P\{(T,T,H)\} = (1-p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P\{N=n\} = P\{(\underbrace{T,T,\ldots,T}_{n-1},H)\} = (1-p)^{n-1}p, \quad n \geq 1$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{N=n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N=n\} = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}$$

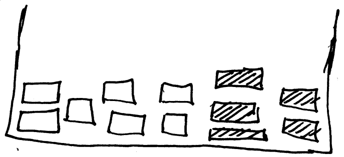
$$= \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

(#) Skup se sastoji od 7 dobrih i 5 defektnih proizvoda. Iz tog skupa uzmemo najedrom tri proizvoda.

(a) Kolika je vjerovatnoća da će bar jedan od njih biti defektan?

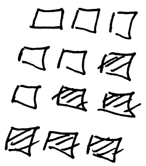
(b) Kolika je vjerovatnoća da će svi izvučeni proizvodi biti dobri?

Rj



Uzimamo tri proizvoda

dobri proizvodi	defektni proizvodi
3	0
2	1
1	2
0	3



Ako sve proizvode u skupu označimo različitim bojama - na koliko načina možemo izvući tri različita proizvoda?

kombinacija bez ponavljanja $n=12$, $k=3$ $\quad C^n_k = \binom{n}{k} = \binom{12}{3} = \frac{\cancel{12}^{4}\cdot 11\cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{1\cdot2\cdot3}} = 220$

Na 220 načina možemo izvući tri različita proizvoda.

Neka je X slučajna promjenjiva koja registruje broj defektnih proizvoda u uzorku od 3 proizvoda koji je izvučen iz osnovnog skupa koji ima 12 proizvoda od kojih je 5 defektno. Tada

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{7}{3}}{220} = \frac{\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{2\cdot3}\cdot1}}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44} \approx 0,15909$$

$$P\{X=1\} = \frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}}{220} = \frac{\frac{7\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}\cdot 5}{220} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$$

$$P\{X=2\} = \frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{5}{2}}{220} = \frac{7\cdot\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot1}}{220} = \frac{70}{220} = \frac{14}{44}$$

$$P\{X=3\} = \frac{\binom{5}{3}}{220} = \frac{\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{1\cdot2\cdot3}}}{220} = \frac{10}{220} = \frac{2}{44}$$

Primjetimo da je $\sum_{i=0}^{3} P\{X=i\} = 1$

Prema tome:

(a) $$P\{X\geq 1\} = 1 - P\{X<1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44} \approx 0,8409$$

$$P\{X\geq 1\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} = \frac{21+14+2}{44} = \frac{37}{44} \approx 0,8409$$

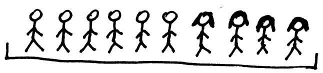
(b) $$P\{X=0\} = \frac{7}{44} \approx 0,16$$

Među 10 prijavljenih kandidata na konkurs za 4 radna mjesta prijavile su se 4 žene. Pod uslovom da se izbor vrši na slučajan način, kolika je vjerovatnoća:

(a) da neće biti izabrana nijedna žena?

(b) da će biti izabrana bar jedna žena?

Rj.



Ako sve osobe označimo drugačije (npr. drugačijom bojom), na koliko načina možemo izabrati četri različite osobe?

$$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{1}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}} = 210$$

Neka je X slučajna promjenjiva koja registruje broj žena izabranih za 4 radna mjesta iz skupa od 10 kandidata, među kojima su 4 žene.

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{6}{4}}{210} = \frac{\binom{6}{2}}{210} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2}}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

$$P\{X=1\} = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{1}}{210} = \frac{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4}{210} = \frac{80}{210}$$

$$P\{X=2\} = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{210} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{210} = \frac{90}{210}$$

$$P\{X=3\} = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{3}}{210} = \frac{6\cdot 4}{210} = \frac{24}{210}$$

$$P\{X=4\} = \frac{\binom{4}{4}}{210} = \frac{1}{210}$$

(a) $P\{X=0\} = \frac{1}{14}$

(b) $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = \frac{13}{14}$

ili $P\{X\geq 1\} = $
$= P\{X=1\} + P\{X=2\} + $
$+ P\{X=3\} + P\{X=4\}$

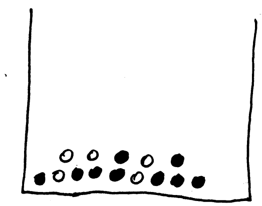
U jednom šeširu se nalazi 9 crnih i 5 bijelih kuglica.

(a) Kolika je vjerovatnoća da među 4 slučajno izvučene kuglice ne bude nijedna bijela?

(b) Kolika je vjerovatnoća da od 4 izvučene kuglice budu tačno 3 crne?

(c) Kolika je vjerovatnoća da među 4 izvučene kuglice bude bar jedna crna?

Rj.



U šeširu se ukupno nalazi 14 kuglica. Ako sve kuglice označimo drugačije tada postoji $\binom{14}{4}$ različitih skupova od po 4 različite kuglice.

$$\binom{14}{4} = \frac{\cancel{14}^{7}\cdot 13\cdot \cancel{12}^{1}\cdot 11}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}_{1}} = 1001$$

Neka je X slučajna promjenjiva koja registruje broj izvučenih crnih kuglica među 4 izvučene kuglice iz skupa od 14 kuglica (9 crnih i 5 bijelih)

(a) $P\{X=4\} = \frac{\binom{9}{4}}{1001} = \frac{\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}{1001} = \frac{126}{1001} \approx 0{,}1259 \doteq 12{,}6\%$

(b) $P\{X=3\} = \frac{\binom{9}{3}\binom{5}{1}}{1001} = \frac{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 5}{1001} = \frac{420}{1001} \approx 0{,}4196 \approx 42\%$

(c) $P\{X\geq 1\} = 1 - P\{X<1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{1001} =$
$= 1 - \frac{5}{1001} \approx 0{,}9950 \approx 99{,}5\%$

Diskretne slučajne varijable

Za slučajnu varijablu koja može uzeti najviše prebrojivo mnogo mogućih vrijednosti kažemo da je diskretna. Za diskretnu slučajnu varijablu X, definišemo f-ju gustine vjerovatnoće $p(a)$ od X sa

$$p(a) = P\{X = a\}$$

F-ja gustine vjerovatnoće $p(a)$ je pozitivna za najviše prebrojivo mnogo vrijednosti a. Tj., ako za X moramo pretpostaviti jednu od vrijednosti $x_1, x_2, \dots$, tada

$$p(x_i) > 0, \qquad i = 1, 2, \dots$$

$$p(x) = 0, \qquad \text{za sve ostale vrijednosti od } x$$

Kako X mora uzeti jednu od vrijednosti x_i, imamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Kumulativa f-je distribucije F se može izraziti po članovima od $p(a)$ sa

$$F(a) = \sum_{\text{sve } x_i \leq a} p(x_i)$$

Na primjer, pretpostavimo da X ima f-ju gustine vjerovatnoće datu sa

$$p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{1}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{6}.$$

Slučajne promenljive diskretnog tipa

Skup svih mogućih ishoda jednog verovatnosnog eksperimenta je Ω. **Slučajna promenljiva** X predstavlja merljivu funkciju koja preslikava skup Ω u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Skup slika od X označavamo sa $\mathcal{R}_X$ i zovemo **skup vrednosti** slučajne promenljive X.

Slučajna promenljiva je **diskretnog** tipa ako je skup vrednosti konačan ili prebrojiv. Tada ga možemo predstaviti u obliku $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Sa $\mathsf{p}(x_i)$ obeležavamo verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u x_i, tj.

$$\mathsf{p}(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}), \tag{2.1}$$

pri čemu važi da je

$$\sum_i \mathsf{p}(x_i) = \sum_i \mathsf{P}(X = x_i) = 1. \tag{2.2}$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $\mathsf{p}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ predstavlja **zakon raspodele** slučajne promenljive X. Zakon raspodele slučajne promenljive X najčešće predstavljamo šematski

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \dots & \mathsf{p}(x_n) & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Funkciju raspodele slučajne promenljive X označavamo sa $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i definišemo sa

$$F_X(x) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \mathsf{P}(X < x) = \sum_{i:\, x_i < x} \mathsf{p}(x_i). \tag{2.4}$$

Slučajna promenljiva X ima **binomnu** $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{0, 1, \dots, n\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \tag{2.5}$$

gde je $i \in \mathcal{R}_X$, $q = 1 - p$.

Slučajna promenljiva X ima **Poasonovu** (*Poisson*) $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$, ako je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ njen skup vrednosti i za $i \in \mathcal{R}_X$ važi

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}. \tag{2.6}$$

Slučajna promenljiva X ima **geometrijsku** $\mathcal{G}(p)$ raspodelu sa parametrom $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, \dots\}$, a odgovarajuće verovatnoće su date sa

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}(X = i) = q^{i-1} p, \tag{2.7}$$

za $i \in \mathcal{R}_X$, $q = 1 - p$.

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu i $n \to \infty$, a $p \to 0$ i $np \to \lambda = const$, tada

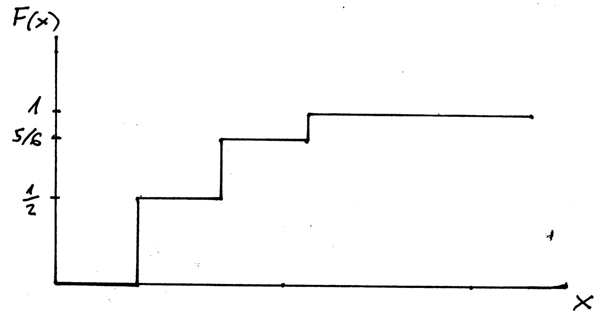
$$\binom{n}{i} p^i q^{n-i} \to \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \tag{2.8}$$

tj. verovatnoće koje odgovaraju binomnoj raspodeli konvergiraju ka verovatnoćama koje odgovaraju Poasonovoj raspodeli.

Tada kumulativna f-ja distribucije F od X je data sa

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le a < 2 \\ \frac{5}{6}, & 2 \le a < 3 \\ 1, & 3 \le a \end{cases}$$

Ovo je grafički predstavljeno na sljedećoj slici



Graf f-je $F(x)$

Diskretne slučajne varijable se često dijele prema njihovim f-jama gustine vjerovatnoće:

- Bernulijeva slučajna varijabla
- Binomna slučajna varijabla
- Geometrijska slučajna varijabla
- Poissonova slučajna varijabla

Bernoulli-jeva slučajna varijabla

Pretpostavimo da posmatramo eksperiment čiji izlaz se može klasifikovati ili kao "uspjeh" ili kao "neuspjeh". Ako stavimo da je X jednak 1 ako je izlaz uspjeh i 0 ako je neuspjeh, tada je f-ja gustine vjerovatnoće od X data sa

$$p(0) = P\{X = 0\} = 1 - p$$
$$p(1) = P\{X = 1\} = p \qquad \dots (*)$$

gdje je p, $0 \le p \le 1$, vjerovatnoća da ishod eksperimenta bude "uspješan".

Za slučajnu varijablu X kažemo da je Bernulijeva slučajna varijabla ako je njena f-ja gustine vjerovatnoće data sa jednakostima $(*)$ za neko $p \in (0,1)$.

Binomna slučajna varijabla

Pretpostavimo da se n nezavisnih ishoda, koji kao rezultat mogu biti "uspješni" sa vjerovatnoćom p i "neuspješni" sa vjerovatnoćom $1-p$, treba dogoditi. Ako X predstavlja broj uspješnih ishoda od n mogućih, tada za X kažemo da je binomna slučajna varijabla sa parametrima (n,p).

F-ja gustine vjerovatnoće binomne slučajne varijable sa parametrima (n,p) je data sa

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0,1,\dots,n \qquad \dots (\Delta)$$

gdje je

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

jednako broju različitih grupa od po i objekata koji se mogu izabrati iz skupa od po n objekata. Tačnost jednakosti (Δ) se može provjeriti tako što ćemo prvo primijetiti da je vjerovatnoća od bilo kojeg niza od n izlaza koji sadrže i uspješnih i $n-i$ neuspješnih, pretpostavljajući da su ishodi nezavisni, jednak $p^i(1-p)^{n-i}$. Jednakost (Δ) tada slijedi zato što postoji $\binom{n}{i}$ različitih nizova od n ishoda u kojima je i uspješno a $n-i$ neuspješno. Npr., ako je $n=3$, $i=2$ tada postoji $\binom{3}{2}=3$ načina u kojima 3 ishoda kao rezultat imaju dva uspješna. Naime, bilo koji od 3 ishoda (s,s,f), (s,f,s), (f,s,s) gdje je izlaz (s,s,f) značenja da su prva dva ishoda uspješna a da je treći neuspješan. Kako bilo koji od tri izlaza (s,s,f), (s,f,s) i (f,s,s) ima vjerovatnoću $p^2(1-p)$ pojavljivanja željena vjerovatnoća je time $\binom{3}{2}p^2(1-p)$.

Primjetimo da, prema binomnoj teoremi, suma vjerovatnoća je jedan, tj.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1$$

Pretpostavimo da sprovodimo eksperiment u kome bacamo 4 obična novčića. Ako pretpostavimo da su izlazni nezavisni, kolika je vjerovatnoća da se pojave dvije glave i dva pisma?

Rj.

P P G G

Koliko različitih nizova možemo formirati od 4 novčića u kojima će se pojaviti dva pisma i dvije glave

PPGG
PGPG
PGGP
GPPG
GPGP
GGPP

permutacija sa ponavljanjem

$$\overline{P}^{4}_{2;2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

Ako je vjerovatnoća pojave pisma $\frac{1}{2}$ a pojavi glave $\frac{1}{2}$, svaka od datih permutacija ima vjerovatnoću $\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Neka je X slučajna promjenjiva koja označava broj glava koje su se pojavile. Tada

$$P\{X=2\} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

binomna slučajna varijabla sa parametrima $n=4$, $p=\frac{1}{2}$

Primjetimo da imamo

$$P\{X=0\} = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P\{X=1\} = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$P\{X=3\} = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Poznato je da će proizvod proizveden sa određenom mašinom biti defektan sa vjerovatnoćom od 0,1 nezavisno od bilo kojeg drugog proizvoda. Kolika je vjerovatnoća da će u uzorku od 3 proizvoda, najviše jedan biti defektan?

Rj.

Neka je X broj defektnih proizvoda u uzorku i posmatrajmo nezavisno slučajeve za $X=0$ i $X=1$

1° označimo sa i ispravan proizvod, i sa d defektan proizvod.

Koliko različitih nizova možemo formirati od 3 ispravna proizvoda

i i i

$$\overline{P}^{3}_{3;0} = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1 = \binom{3}{0}$$

binomna slučajna varijabla

Time $P\{X=0\} = \binom{3}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^3 = 0{,}729$

2° i ispravan proizvod
d defektan proizvod

Koliko različitih nizova možemo formirati od 2 ispravna i jednog defektnog proizvoda

d i i
i d i
i i d

$$\overline{P}^{3}_{2;1} = \frac{3!}{2!\,1!} = \binom{3}{1} = 3$$

binomna slučajna varijabla

$$P\{X=1\} = \binom{3}{1}(0{,}1)^1\cdot(0{,}9)^2 = 0{,}243$$

Tražena vjerovatnoća je $P\{X\le 1\} = 0{,}972$

(#) Pretpostavimo da će se motor aviona pokvariti u letu, sa vjerovatnoćom $1-p$, nezavisno od motora do motora; i predpostavimo da će avion uspješno letjeti ako najmanje 50 posto njegovih motora ostane u funkciji. Za koju vrijednost p će četvero-motorni avion biti poželjniji od dvo-motornog aviona?

Rj:

Prije nego što počnemo rješavati zadatak posmatrajmo četvero-motorni avion. On će uspješno preletjeti datu destinaciju ako mu u f-ji ostane 2, 3, ili 4 motora. Vjerovatnoća da četvero-motorni avion uspješno preleti željenu destinaciju sa dva pokvarena motora je

(N) - neispravan motor

(I) - ispravan motor

$$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$$

(I)(I)(N)(N)

(I)(N)(I)(N)

(I)(N)(N)(I)

⋮

$$\overline{P}^4_{2;2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \binom{4}{2} = \frac{\cancel{4}^{3}}{\cancel{2}_{1}} =$$

[binomna raspodjela]

Prema tome vjerovatnoća da će četvero-motorni avion uspješno preletjeti datu destinaciju je

$$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2 + \binom{4}{3}p^3(1-p) + \binom{4}{4}p^4(1-p)^0 =$$

$$= 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$$

dok odgovarajuća vjerovatnoća za dvo-motorni avion je

$$\binom{2}{1}p(1-p) + \binom{2}{2}p^2(1-p)^0 = 2p(1-p) + p^2$$

Time je četvero-motorni avion sigurniji ako

$$6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 \geq 2p(1-p) + p^2 \quad /:p$$

$$6p(1-p)^2 + 4p^2(1-p) + p^3 \geq 2-p$$

: ZA VJEŽBU KVADRIRATI, SABRATI I ODUZETI I PREBACITI SVE NA JEDNU STRANU

$$3p^3 - 8p^2 + 7p - 2 \geq 0$$

$$(p-1)^2(3p-2) \geq 0$$

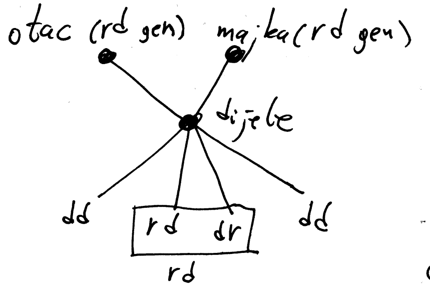
$$3p - 2 \geq 0$$

$$p \geq \frac{2}{3}$$

Možemo zaključiti da će četvero-motorni avion biti sigurniji kada je vjerovatnoća uspješnosti motora najmanje $\frac{2}{3}$, dok je dvomotorni avion sigurniji kada ova vjerovatnoća pada ispod $\frac{2}{3}$.

Pretpostavimo da je određeno obilježje osobe (kao što je boja očiju ili boja kose ili određena strana za služenje rukom) određeno na osnovu baze jednog para gena i pretpostavimo da d predstavlja dominantan gen a r recesivan gen. Time osoba sa dd genima je čisto dominantna, osoba sa rr je čista recesivna, a ona sa rd je hibrid (mješanac). Čisto dominantni i hibridi su slični u vanjskom izgledu. Djeca dobijaju jedan gen od svakog roditelja. Ako, u odnosu na određeno obilježje, dva hibrid roditelja imaju ukupno četvero djece, kolika je vjerovatnoća da tačno troje od četvero djece imaju vanjski izgled dominantnog gena?

Rj.



Ako predpostavimo da svako dijete ima jednaku mogućnost da naslijedi bilo koji od dva gena od bilo kojeg roditelja, vjerovatnoće da dijete od dva hibrid roditelja ima dd, rr ili rd par gena, su redom $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$. Nama treba da vanjski izgled djeteta bude kao kod dominantnog gena, tj. ako je par gena ili dd ili rd. (vjerovatnoća za dd ili rd je $\frac{3}{4}$).

T T T N
T T N T
T N T T
N T T T

binomna distribucija

$$\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64}$$ tražena vjerovatnoća

Geometriska slučajna varijabla

Pretpostavimo da vršimo neka ispitivanja, od kojih svaki ima vjerovatnoću p da bude uspješan, i da ova ispitivanja vršimo sve dok se uspješan ishod ne pojavi. Ako sa X označimo broj ispitivanja koja vršimo sve dok se ne pojavi uspješan, tada za X kažemo da je geometriska slučajna promjenjiva sa parametrom p. Njena f-ja gustine vjerovatnoće je data sa

$$p(n) = P\{X=n\} = (1-p)^{n-1}p, \qquad n=1,2,\ldots$$

Ova jednakost slijedi zato što, da bi X bio jednak n potrebno je i dovoljno da prvih $n-1$ ispitivanja bude neuspješan a da n-ti ispit bude uspješan. Jednakost slijedi zato što smo za ishode uzastopnih ispitivanja pretpostavili da su nezavisni.

Da bi provjerili da je $p(n)$ f-ja gustine vjerovatnoće, primjetimo da

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = 1$$

Poissonova slučajna variabla

Za slučajna varijabla X, koja uzima jednu od vrijednosti 0, 1, 2, ..., kažemo da je Poissonova slučajna varijabla sa parametrom λ, ako za neko $\lambda > 0$,

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \ldots \qquad \ldots (1)$$

Jednakost (1) definiše f-ju gustine vjerovatnoće zato što je

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Poissonova slučajna varijabla ima široku primjenu u različitim oblastima.

Važna osobina Poissonove slučajne varijable je ta što može biti korištena za aproksimaciju binomne slučajne varijable kada je binomni parametar n velik a p mali. Da bi vidjeli ovo, pretpostavimo da je X binomna slučajna varijabla sa parametrima (n, p), i neka je $\lambda = np$. Tada

$$P\{X = i\} = \frac{n!}{(n-i)!\, i!} p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\, i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

Sad, za n veliko i p malo

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \quad \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i} \approx 1, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

Time za n veliko i p malo

$$P\{X = i\} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

\# Pretpostavimo da broj štamparskih grešaka na jednoj stranici neke knjige koju čitate ima Poissonovu distribuciju sa parametrom $\lambda=1$. Izračunati vjerovatnoću da postoji najmanje jedna greška na trenutnoj stranici te knjige koju čitate.

Rj.

Za slučajnu varijablu sa Poissonovom distribucijom vrijedi

$$P\{X=0\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \overset{\lambda=1}{=\!=} e^{-1}$$

$$P\{X=1\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} \overset{\lambda=1}{=\!=} e^{-1}$$

$$P\{X=2\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$\vdots$$

Nama treba $P\{X\geq 1\}$.

$$P\{X\geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1-e^{-1} \approx 0{,}633$$

\# Ako je broj nesreća koje se pojave na magistrali 5C svaki dan Poissonova slučajna varijabla sa parametrom $\lambda=3$, kolika je vjerovatnoća da danas ne bude nesreća?

Rj.

Za Poissonovu slučajnu varijablu X sa parametrom λ (gdje je $\lambda>0$) vrijedi

$$P\{X=i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i=0,1,2,\ldots$$

Nama treba

$$P\{X=0\} = e^{-3} \approx 0{,}05.$$

Sedamnaest zadataka koji slijede ([68]-[84]) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

[68] *Firma na raspolaganju ima šest telefonskih linija. Neka je X broj linija zauzetih u određenom trenutku. Zakon raspodele za X dat je sa*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

(a) *Izračunati verovatnoće sledećih događaja*
A - „bar tri linije su zauzete”, *C - „najmanje četiri linije nisu zauzete”,*
B - „manje od dve linije su zauzete”, *D - „zauzeto je između dve i pet linija”.*

(b) *Izračunati* $F_X(1.3)$, $F_X(3)$ *i* $F_X(4.6)$.

(c) *Naći funkciju raspodele* $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

(a) Tražene verovatnoće su:

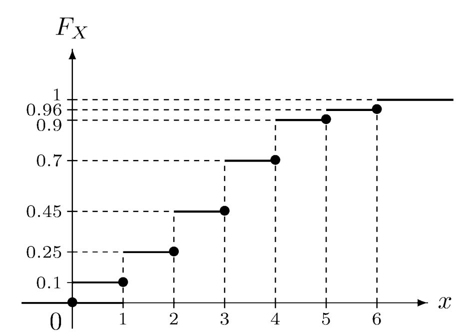
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(X \geq 3) = \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) + \mathsf{P}(X=5) + \mathsf{P}(X=6) =$$
$$= 0.25 + 0.2 + 0.06 + 0.04 = 0.55,$$
$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$
$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45,$$
$$\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(2 \leq X \leq 5) =$$
$$= \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) + \mathsf{P}(X=5) =$$
$$= 0.2 + 0.25 + 0.2 + 0.06 = 0.71.$$

(b) Na osnovu (2.4) imamo da je

$$F_X(1.3) = \mathsf{P}(X < 1.3) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$
$$F_X(3) = \mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45,$$
$$F_X(4.6) = \mathsf{P}(X < 4.6) =$$
$$= \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) + \mathsf{P}(X=4) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.25 + 0.2 = 0.9.$$

(c) Primenjujući (2.4) određujemo funkciju raspodele i njen grafik

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.1, & 0 < x \leq 1 \\ 0.25, & 1 < x \leq 2 \\ 0.45, & 2 < x \leq 3 \\ 0.7, & 3 < x \leq 4 \\ 0.9, & 4 < x \leq 5 \\ 0.96, & 5 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases},$$



[69] *Ako je* $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3,4\}$ *skup vrednosti slučajne promenljive* X, *i ako je* $\mathsf{P}(X = i) = c\,(5 - i)$, *odrediti konstantu* c *tako da* X *bude slučajna promenljiva.*

Rešenje: Da bi X bila slučajna promenljiva neophodno je da važi $\mathsf{P}(X = x_i) \geq 0$ i (2.2). Kako je $0 \leq i \leq 4$ imamo da je $c \geq 0$. Koristeći uslov (2.2) dalje imamo $5c + 4c + 3c + 2c + c = 1$ odakle je $c = \frac{1}{15}$.

---

[70] *Neka je* X *broj guma koje nisu dovoljno napumpane na slučajno izabranom automobilu.*

(a) *Koja od tri ponuđene funkcije* P *određuje zakon raspodele za slučajnu promenljivu* X.

x_i	0	1	2	3	4
$\mathsf{P}(X = x_i)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$\mathsf{P}(X = x_i)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$\mathsf{P}(X = x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

(b) *Za funkciju koja određuje zakon raspodele izračunati* $\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4)$, $\mathsf{P}(X \leq 2)$ *i* $\mathsf{P}(X \neq 0)$.

(c) *Naći funkciju raspodele slučajne promenljive* X.

Rešenje:

(a) Za sve tri ponuđene funkcije važi da su nenegativne, tako da još treba proveriti u kom slučaju važi uslov (2.2). Za prvu funkciju je $\sum\limits_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X = x_i) = 0.7$, za drugu je $\sum\limits_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X = x_i) = 1$ i za treću $\sum\limits_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X = x_i) = 1.1$, tako da jedino druga funkcija određuje zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Tražene verovatnoće su:

$\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) = 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.5$,

$\mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = 0.4 + 0.1 + 0.1 = 0.6$,

$\mathsf{P}(X \neq 0) = 1 - \mathsf{P}(X = 0) = 1 - 0.4 = 0.6$.

(c) Funkcija raspodele $F_X(x) = \mathsf{P}(X < x), x \in \mathbb{R}$ je $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.4, & 0 < x \leq 1 \\ 0.5, & 1 < x \leq 2 \\ 0.6, & 2 < x \leq 3 \\ 0.7, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

[71] *Od izvođača radova se zahteva da podnesu jedan, dva, tri, četiri ili pet formulara (u zavisnosti od vrste posla) kod dobijanja građevinske dozvole. Neka je* X *broj formulara koji se zahteva od narednog podnesioca molbe. Verovatnoća da se zahteva* i *formulara je proporcionalna sa* i, $i = 1,2,3,4,5$.

(a) *Odrediti vrednost konstante proporcionalnosti.*

(b) *Izračunati verovatnoću da će najmanje tri formulara biti zahtevana.*

(c) *Izračunati verovatnoću da će broj formulara koji se zahtevaju biti između dva i četiri.*

(d) *Da li funkcija* $\mathsf{P}(Y = i) = \frac{i^2}{50}$, $i = 1,2,3,4,5$ *može biti zakon raspodele slučajne promenljive* Y?

Rešenje:

(a) Na osnovu uslova zadatka verovatnoća da se zahteva i formulara proporcionalna je sa i, te je $\mathsf{P}(X = i) = k \cdot i$, $i = 1,2,3,4,5$. Na osnovu uslova nenegativnosti dobijamo da je $k \geq 0$, pa primenom (2.2) dobijamo $i + 2i + 3i + 4i + 5i = 1$, odakle je $i = \frac{1}{15}$.

(b) Tražena verovatnoća je

$\mathsf{P}(X \geq 3) = \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) + \mathsf{P}(X = 5) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{4}{5}$.

(c) Znači, $\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$.

(d) Kako je $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{i^2}{50} = \frac{1+4+9+16+25}{50} = \frac{55}{50}$ na osnovu (2.2) data funkcija ne može biti zakon raspodele slučajne promenljive Y.

---

[74] *U kutiji se nalaze 4 bele i 6 zelenih kuglica. Pera izvlači jednu po jednu kuglicu bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju sve dok ne izvuče zelenu kuglicu. Slučajna promenljiva* X *predstavlja broj izvedenih izvlačenja. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X *i izračunati* $F_{2X+1}(5)$ *i* $F_{X^2}(6)$.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\{1,2,3,4,5\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{6}{10}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{15}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{10}$, $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(BBBZ) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{35}$, $\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}(BBBB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$, gde je sa B označen događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*". Traženi zakon raspodele je $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & \frac{1}{35} & \frac{1}{210} \end{pmatrix}$.

Primenom definicije funkcije raspodele dobija se

$F_{2X+1}(5) = \mathsf{P}(2X + 1 < 5) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X = 1) = \frac{6}{10}$,

$F_{X^2}(6) = \mathsf{P}(X^2 < 6) = \mathsf{P}(-\sqrt{6} < X < \sqrt{6}) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{13}{15}$.

[72] *U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem* 1, *četiri kuglice označene brojem* 2 *i dve kuglice označene brojem* 3. *Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je* X *slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X.

(b) *Izračunati* $F_X(2.5)$, $F_X(-1)$, $F_X(2)$ *i* $F_X(5)$.

(c) *Naći funkciju raspodele,* $F_X(x)$, *za slučajnu promenljivu* X *i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

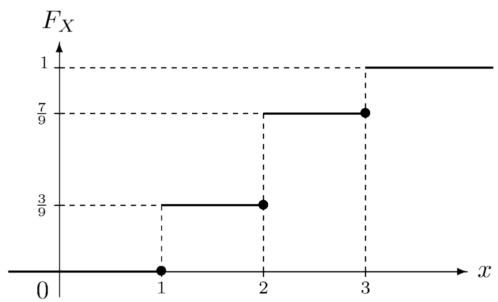
(a) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{1,2,3\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X=1)=\frac{3}{9}$, $\mathsf{P}(X=2)=\frac{4}{9}$ i $\mathsf{P}(X=3)=\frac{2}{9}$. Znači, traženi zakon raspodele slučajne promenljive X je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

(b) Na osnovu (2.4) imamo da je

$F_X(2.5) = \mathsf{P}(X<2.5) = \mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2) = \frac{3}{9}+\frac{4}{9} = \frac{7}{9}$,
$F_X(-1) = \mathsf{P}(X<-1) = 0$,
$F_X(2) = \mathsf{P}(X<2) = \mathsf{P}(X=1) = \frac{3}{9}$,
$F_X(5) = \mathsf{P}(X<5) = \mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2)+\mathsf{P}(X=3) = \frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9} = 1$.

(c) Tražena funkcija raspodele $F_X(x)$, $x\in\mathbb{R}$ i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{3}{9}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{9}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases},$$



[75] *Biljana baca kockicu za „Ne ljuti se čoveče". Slučajna promenljiva* X *predstavlja vrednost ostatka pri deljenju palog broja sa* 4. *Napisati zakon raspodele slučajne promenljive* X.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X=0) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 4"$) = \frac{1}{6}$,

$\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 1 *ili broj* 5"$) = \frac{2}{6}$,

$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 2 *ili broj* 6"$) = \frac{2}{6}$,

$\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 3"$) = \frac{1}{6}$,

tako da je $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

[73] *U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem* 1, *četiri kuglice označene brojem* 3, *i jedna kuglica označena brojem* 5. *Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je* X *slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X.

(b) *Izračunati* $F_X(2)$, $F_X(4)$, $F_X(8)$ *i* $F_X(16.375)$.

(c) *Naći funkciju raspodele,* $F_X(x)$, *za slučajnu promenljivu* X *i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

(a) Označimo sa $k_{\{m,n\}}$, $m,n\in\{1,3,5\}$ događaj „izvučene su kuglice sa brojevima m i n" (pri čemu je nebitan redosled izvučenih kuglica). Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2,4,6,8\}$ pri čemu je

$$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(k_{\{1,1\}}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21},$$

$$\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(k_{\{1,3\}}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21},$$

$$\mathsf{P}(X=6) = \mathsf{P}(k_{\{1,5\}}\cup k_{\{3,3\}}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21} \text{ i}$$

$$\mathsf{P}(X=8) = \mathsf{P}(k_{\{3,5\}}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{21},$$

tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{21} & \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

(b) Koristeći (2.4) imamo:

$F_X(2) = \mathsf{P}(X<2) = 0$,

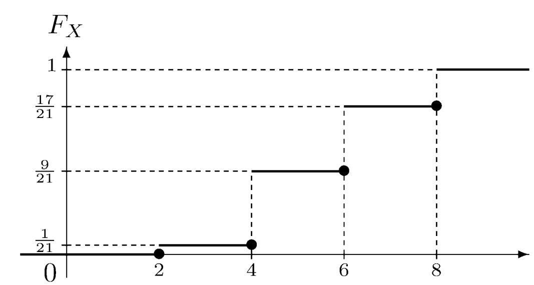
$F_X(4) = \mathsf{P}(X<4) = \mathsf{P}(X=2) = \frac{1}{21}$,

$F_X(8) = \mathsf{P}(X<8) = 1-\mathsf{P}(X=8) = 1-\frac{4}{21} = \frac{17}{21}$,

$F_X(16.375) = \mathsf{P}(X<16.375) = 1$.

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{21}, & 2 < x \le 4 \\ \frac{9}{21}, & 4 < x \le 6 \\ \frac{17}{21}, & 6 < x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases},$$



[76] *U kutiji se nalaze p kuglica označenih brojem 2 i q kuglica označenih brojem 3 $(p, q \geq 2)$.*

(a) *Izvlači se jedna kuglica. Slučajna promenljiva X predstavlja izvučeni broj. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izvlače se dve kuglice odjednom. Slučajna promenljiva Y predstavlja zbir izvučenih brojeva. Naći zakon raspodele slučajne promenljive Y.*

Rešenje:

(a) Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2,3\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=2)=\frac{p}{p+q}$ i $\mathsf{P}(X=3)=\frac{q}{p+q}$, tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{4,6,9\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(Y=4) = \frac{\binom{p}{2}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}$, $\mathsf{P}(Y=6) = \frac{\binom{p}{1}\binom{q}{1}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)}$ i $\mathsf{P}(Y=9) = \frac{\binom{q}{2}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)}$ tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)} & \frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)} & \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)} \end{pmatrix}$.

---

[77] *U kutiji se nalazi 5 crvenih i 3 bele kuglice. Slavica izvlači tri kuglice istovremeno. Slučajna promenljiva X predstavlja broj izvučenih belih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3\}$ i $\mathsf{P}(X=0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}$, $\mathsf{P}(X=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}$, $\mathsf{P}(X=2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$ i $\mathsf{P}(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$, tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{10}{56} & \frac{30}{56} & \frac{15}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$.

---

[82] *Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je 0.9. Ako je meta pogođena najviše jedanom strelac dobija -5 poena, ako ostvari dva pogotka dobija 5 poena, a u preostalom slučaju 10 poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj osvojenih poena. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Na osnovu uslova zadatka skup vrednosti tražene slučajne promenljive je $\mathcal{R}_X = \{-5, 5, 10\}$, a dogovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X=-5) = \mathsf{P}(\text{„}$*Strelac ima 3 promašaja ili 2 promašaja i 1 pogodak*$\text{”}) = 0.1^3 + \binom{3}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 = 0.028$, $\mathsf{P}(X=5) = \mathsf{P}(\text{„}$*Strelac ima 2 pogotka i 1 promašaj*$\text{”}) = \binom{3}{2} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$ i $\mathsf{P}(X=10) = \mathsf{P}(\text{„}$*Strelac ima 3 pogotka*$\text{”}) = 0.9^3 = 0.729$, tako da je $X : \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0.028 & 0.243 & 0.729 \end{pmatrix}$.

---

[78] *Kockica se baca do prve pojave šestice ali najviše četiri puta. Neka slučajna promenljiva X predstavlja ukupan broj izvedenih bacanja.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(2 \leq X < 4)$, $\mathsf{P}(2 < X < 4)$ *i* $\mathsf{P}(X < 3.)$

(c) *Naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Označimo sa D događaj da se u jednom bacanju kockice pojavi broj 6, a sa $\bar{D}$ da se u jednom bacanju kockice ne pojavi broj 6. Tada je $\mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$ i $\mathsf{P}(\bar{D}) = \frac{5}{6}$. Primetimo da su bacanja kockice međusobno nezavisna.

(a) Očigledno je da je $\mathcal{R}_X = \{1,2,3,4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(D) = \tfrac{1}{6},$$
$$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(\bar{D}D) = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{36},$$
$$\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}D) = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{25}{216},$$
$$\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D + \bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{125}{216},$$

tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix}$.

(b) Tražene verovatnoće su

$$\mathsf{P}(2 \leq X < 4) = \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) = \tfrac{5}{36} + \tfrac{25}{216} = \tfrac{55}{216},$$
$$\mathsf{P}(2 < X < 4) = \mathsf{P}(X=3) = \tfrac{25}{216},$$
$$\mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{36} = \tfrac{11}{36}.$$

(c) Primenjujući (2.4) dobijamo da je $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{36}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{91}{216}, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

---

[79] *Četiri osobe izvlače na slučajan način, jedna za drugom, po jednu šibicu od četiri ponuđene, od kojih je jedna kraća od ostalih. Izvučena šibica i osoba koja ju je izvukla se ne vraćaju u igru. Slučajna promenljiva X predstavlja redni broj izvlačenja u kojem je izvučena kraća šibica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{1,2,3,4\}$. Označimo sa K_i događaj „*u i-tom izvlačenju je izvučena kraća šibica*”, $i = 1,2,3,4$. Iz $\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(K_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(\overline{K_1}K_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}(\overline{K_1}\;\overline{K_2}K_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(\overline{K_1}\;\overline{K_2}\;\overline{K_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ dobija se traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

---

[80] *U kutiji se nalazi* 5 *belih i* 3 *zelene kuglice. Zoran na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu*

(a) *bez vraćanja*

(b) *sa vraćanjem*

dok ne izvuče kuglicu zelene boje. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X *koja predstavlja broj izvlačenja.*

Rešenje: Označimo sa B događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*".

(a) Broj izvlačenja može biti $\{1,2,3,4,5,6\}$ tako da je traženi zakon raspodele X : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{3}{8} & \frac{15}{56} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & \frac{3}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$, gde je $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$, $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{28}$, $\mathsf{P}(X=5)=\mathsf{P}(BBBBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{56}$ i $\mathsf{P}(X=6)=\mathsf{P}(BBBBB)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{56}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\{1,2,3,\ldots\}=\mathbb{N}$. Kako se izvlačenja vrše sa vraćanjem dalje imamo $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8},\ldots$ tako da slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{3}{8})$ raspodelu.

---

[83] *Dinar se baca dok se prvi put ne pojavi grb ali najviše pet puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X *koja predstavlja broj izvedenih bacanja.*

Rešenje: Kako je $\mathcal{R}_X=\{1,2,3,4,5\}$ i

$\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(G_1)=\frac{1}{2}$,

$\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(P_1G_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(P_1P_2G_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(P_1P_2P_3G_4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$,

$\mathsf{P}(X=5)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$,

gde je sa G_i i P_i označena pojava grba, odnosno pisma u i-tom bacanju ($i\in\{1,2,3,4\}$) imamo da je traženi zakon raspodele $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

---

[81] *Dinar se baca tri puta. Slučajna promenljiva* X *predstavlja broj palih grbova, a slučajna promenljiva* Y *uzima vrednost* 1 *ako je palo više grbova, a* -1 *ako je palo više pisama. Naći zakone raspodela slučajnih promenljivih* X *i* Y.

Rešenje: Označimo sa P_i i G_i događaje „*u i-tom bacanju dinara palo pismo, odnosno grb*", gde $i\in\{1,2,3\}$. Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X=\{0,1,2,3\}$, a skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y=\{-1,1\}$. Kako su bacanja dinara međusobno nezavisna imamo da je

$\mathsf{P}(X=0)=\mathsf{P}(P_1P_2P_3)=\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(G_1P_2P_3+P_1G_2P_3+P_1P_2G_3)=$

$=\mathsf{P}(G_1P_2P_3)+\mathsf{P}(P_1G_2P_3)+\mathsf{P}(P_1P_2G_3)=$

$=\mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(G_3)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

Analogno se dobija da je $\mathsf{P}(X=2)=\frac{3}{8}$ i $\mathsf{P}(X=3)=\frac{1}{8}$. Za slučajnu promenljivu Y imamo da je

$\mathsf{P}(Y=-1)=\mathsf{P}(P_1P_2P_3+P_1P_2G_3+P_1G_2P_3+G_1P_2P_3)=$

$=\mathsf{P}(P_1P_2P_3)+\mathsf{P}(P_1P_2G_3)+\mathsf{P}(P_1G_2P_3)+\mathsf{P}(G_1P_2P_3)=$

$=\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(G_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$\mathsf{P}(Y=1)=1-\mathsf{P}(Y=-1)=\frac{1}{2}$.

Tražene slučajne promenljive su $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ i $Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

---

[84] *U kutiji se nalaze* 2 *zelene i* 3 *bele kuglice. Ksenija na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu*

(a) *sa vraćanjem dok ne izvuče kuglicu zelene boje ali najviše* 5 *puta,*

(b) *bez vraćanja dok ne izvuče kuglicu zelene boje.*

Naći zakon raspodele slučajne promenljive X *koja predstavlja broj izvlačenja.*

Rešenje: Označimo sa B događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*".

(a) Broj izvlačenja može biti $1,2,3,4,5$. Odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{18}{125}$, $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBBZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{54}{625}$ i $\mathsf{P}(X=5)=\mathsf{P}(BBBB)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{81}{625}$, tako da je $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{25} & \frac{18}{125} & \frac{54}{625} & \frac{81}{625} \end{pmatrix}$.

(b) Kad Ksenija izvlači kuglice bez vraćanja skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X=\{1,2,3,4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$ i $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBB)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$ i traženi zakon raspodele je X : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

Svi zadaci iz ove lekcije (18 zadataka) su posuđeni iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

2.2 Slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa

U odeljku 2.1 smo razmatrali slučajne promenljive diskretnog tipa kod kojih je skup vrednosti, $\mathcal{R}_X$, najviše prebrojiv. Skup vrednosti slučajne promenljive neprekidnog tipa, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, je neprebrojiv, tj. ona može uzimati vrednosti iz nekog intervala ili iz celog skupa realnih brojeva.

Funkcija gustine, φ_X, slučajne promenljive neprekidnog tipa je nenegativna realna funkcija sa sledećim osobinama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = \mathsf{P}(-\infty < X < \infty) = 1, \tag{2.9}$$

$$\mathsf{P}(X = a) = 0, \text{ za } a \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

za sve $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ važi da je

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \int_a^b \varphi_X(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Važi i sledeće

$$\mathsf{P}(a \le X \le b) = \mathsf{P}(a < X \le b) = \mathsf{P}(a \le X < b) = \int_a^b \varphi_X(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Funkcija raspodele F_X neprekidne slučajne promenljive X je za svako $x \in \mathbb{R}$ data sa

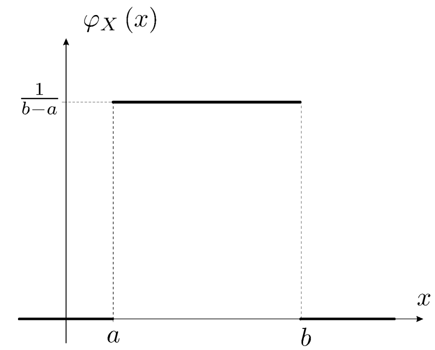
$$F_X(x) = \mathsf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt, \tag{2.13}$$

i u tačkama neprekidnosti važi

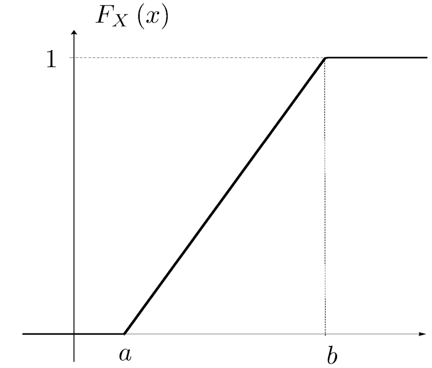
$$\varphi_X(x) = F'_X(x). \tag{2.14}$$

Slučajna promenljiva sa **uniformnom** $\mathcal{U}(a, b)$ raspodelom, gde su $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b); \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{2.15}$$



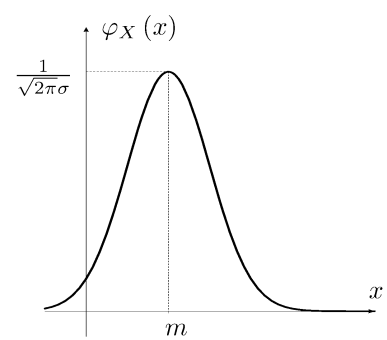
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(a, b)$.



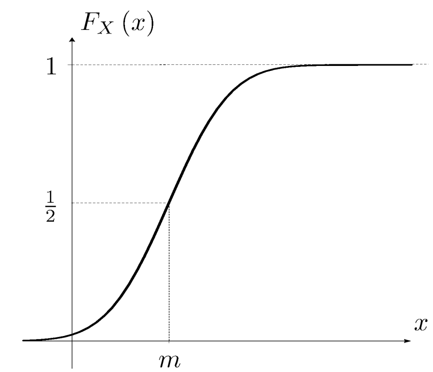
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{U}(a, b)$.

Slučajna promenljiva sa **normalnom** (Gausovom) $\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodelom, gde su $m, \sigma \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in \mathbb{R}; \qquad F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Napomena: **Standardizovana** (**normalizovana**) slučajna promenljiva X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom:[2]

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}; \tag{2.16}$$

ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ tada slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu, tj. ako

[2] transformacije slučajnih promenljivih, matematičko očekivanje $E(X)$ i disperzija $D(X)$ definisani su u poglavlju V

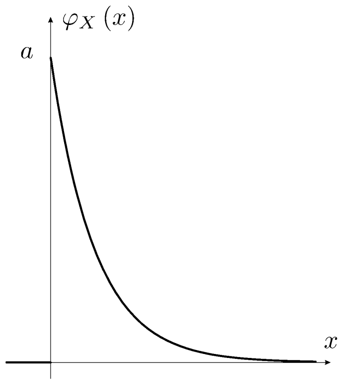
$$X:\mathcal{N}(m,\sigma) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1); \tag{2.17}$$

na osnovu Moavr-Laplasove teoreme možemo zaključiti da raspodela standardizovane binomne slučajne promenljive X^* može biti aproksimirana normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$, tj. ako

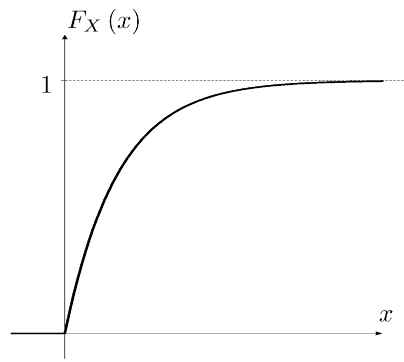
$$X:\mathcal{B}(n,p) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0,1). \tag{2.18}$$

Slučajna promenljiva sa **eksponencijalnom** $\mathcal{E}(a)$ raspodelom, gde je $a>0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x>0, \\ 0, & x\le 0; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases} \tag{2.19}$$



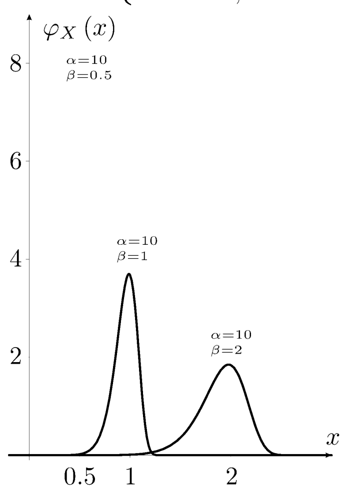
Gustina slučajne promenljive $X:\mathcal{E}(a)$.



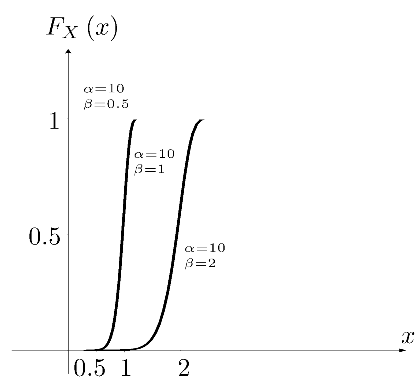
Funkcija raspodele sluč. prom. $X:\mathcal{E}(a)$.

Slučajna promenljiva sa **Vejbulovom** $\mathcal{V}(\alpha,\beta)$ raspodelom, sa parametrima $\alpha>0$, $\beta>0$ ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

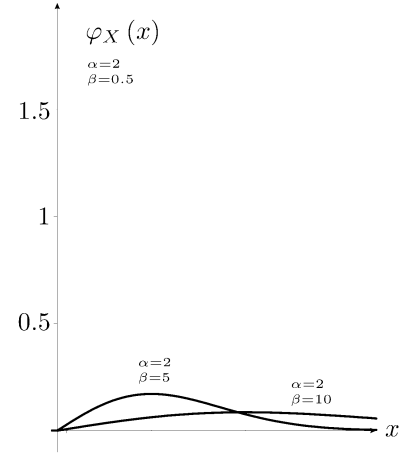
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x>0, \\ 0, & x\le 0; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases} \tag{2.20}$$



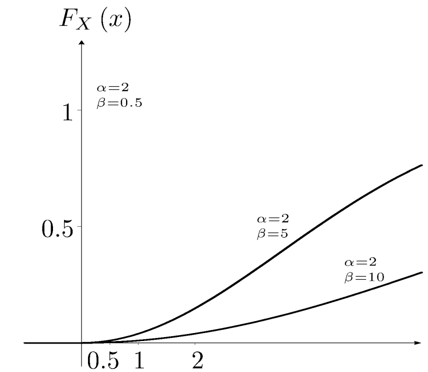
Gustina slučajne promenljive $X:\mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X:\mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Gustina slučajne promenljive $X:\mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X:\mathcal{V}(\alpha,\beta)$.

---

[99] *Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x\notin[0,2]. \end{cases}$$

(a) *Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodele $F_X(x)$ za svako $x\in\mathbb{R}$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?*

(c) *Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(X\le 1)$, $\mathsf{P}(X>1.5)$ i $\mathsf{P}(X=1)$.*

(d) *Grafički predstaviti funkciju gustine φ_X i funkciju raspodele F_X.*

Rešenje:

(a) Direktnom primenom formule (2.13), dobija se

$$F_X(1.2) = \int_{-\infty}^{1.2}\varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}0\,dx + \int_0^{1.2}\frac{1}{2}x\,dx = 0 + \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{1.2} = 0.36.$$

Analogno sledi $F_X(-1) = \int_{-\infty}^{-1}\varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1}0\,dx = 0$,

kao i $F_X(3.5) = \int_{-\infty}^{3.5}\varphi_X(x)\,dx = \int_0^2\frac{1}{2}x\,dx = 1$.

Za pronalaženje funkcije raspodele, razmotrićemo sledeća tri slučaja:
i) Za $x\le 0$, važi da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}0\,dt = 0.$$

ii) Za fiksirano x iz intervala $(0, 2]$, tj. ako je $0 < x \leq 2$, dobija se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} t\, dt = 0 + \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^x = \frac{1}{4} x^2$$

iii) Ako je $x > 2$, dobijamo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2} t\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt = 0 + \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^2 + 0 = 1.$$

Konačno, iz i), ii) i iii) dobija se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(b) Verovatnoća događaja da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena je verovatnoća da slučajna promenjiva X uzima vrednosti između 1 i 1.5. Na osnovu (2.12) dobija se

$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2} x\, dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

Primetimo da isti rezultat možemo dobiti i pomoću funkcije raspodele F_X određene pod (a), tj.

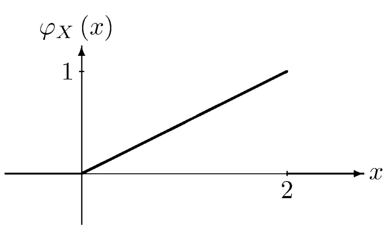
$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

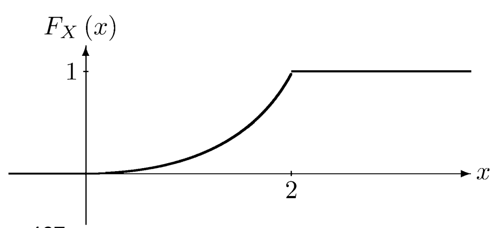
(c) Na osnovu (2.12), dobija se

$$\mathsf{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2} x\, dx = 0 + \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Traženu verovatnoću možemo izračunati i ovako: $\mathsf{P}(X \leq 1) = \mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}$.
Slično, $\mathsf{P}(X > 1.5) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2} x\, dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_{1.5}^{2} = 1 - 0.5625 = 0.4375$ ili pomoću funkcije raspodele $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - \frac{1.5^2}{4} = 0.4375$.
Na osnovu osobine gustine (2.10), koja je zadovoljena za svaki realan broj a, dobija se da je $\mathsf{P}(X = 1) = 0$.

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





[100] *Profesor nikada ne završi čas pre zvona, ali završi u toku prve minute nakon zvona. Neka X predstavlja vreme (izraženo u minutima) koje prođe od zvona do završetka predavanja. Gustina za X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu k.*

(b) *Naći funkciju raspodele za X.*

(c) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen najduže pola minute?*

(d) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen više od 40 sekundi?*

Rešenje:

(a) Konstantu k određujemo tako da bude zadovoljena osobina (2.9). Prema tome,

$$\int_{0}^{1} kx^2\, dx = k \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{k}{3} = 1,$$

a odavde sledi da je tražena konstanta $k = 3$.

(b) Za fiksirano x, $x \leq 0$ funkcija raspodele je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0$. Neka je $x \in (0, 1]$. Tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{0}^{x} 3t^2\, dt = t^3 \big|_0^x = x^3$. Ako je $x > 1$ dobija se $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{0}^{1} 3t^2\, dt = 1$. Dakle, funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(c) Verovatnoća događaja da će čas biti produžen najduže pola minute je verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost manju ili jednaku 0.5. Dakle,

$$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} \varphi_X(x)\, dx = \int_{0}^{0.5} 3x^2\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0.5} = 0.125.$$

Do istog rezultata dolazimo i ako iskoristimo rešenje pod (b), odnosno

$$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = \mathsf{P}(X < 0.5) = F_X(0.5) = 0.5^3 = 0.125.$$

(d) Događaj da je čas produžen više od 40 sekundi podrazumeva da slučajna promenljiva X uzme vrednost strogo veću od $\frac{2}{3}$. Njegova verovatnoća je

$$\mathsf{P}(X > 2/3) = \int_{2/3}^{1} 3x^2\, dx = x^3 \big|_{2/3}^{1} = 1 - (2/3)^3 = 0.7037.$$

Primetimo da pomoću funkcije raspodele dolazimo do istog rezultata $\mathsf{P}(X > 2/3) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 2/3) = 1 - F_X(2/3) = 1 - (2/3)^3 = 0.7037$.

---

[101] *Slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} k(1-(x-3)^2), & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu k i skicirati grafik funkcije φ_X.*

(b) *Izračunati $\mathsf{P}(2.5 < X < 3)$ i $\mathsf{P}(X > 3)$.*

(c) *Odrediti funkciju raspodele F_X i skicirati njen grafik.*

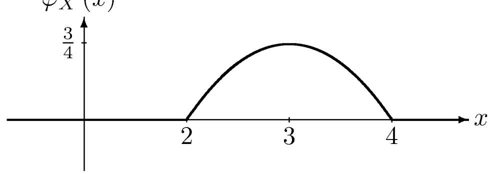
Rešenje:

(a) Konstanta k se određuje iz uslova (2.9). Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = \int_2^4 k(1-(x-3)^2)\,dx = k\int_2^4 (-8+6x-x^2)\,dx =$$

$$= k\left(-8x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^4 = \frac{4}{3}k,$$

iz uslova dobijamo da je tražena konstanta $k = \frac{3}{4}$. Grafik funkcije gustine φ_X je



(b) Slično kao u prethodnom zadatku možemo dobiti tražene verovatnoće

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(2.5 < X < 3) &= \int_{2.5}^{3} \frac{3}{4}(1-(x-3)^2)\,dx = \left\{ \begin{array}{rr} \text{smena} & x-3=t, \\ & dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{-0.5}^{0} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^3\right)\Big|_{-0.5}^{0} = 0.34375. \end{aligned}$$

Dalje, $\mathsf{P}(X > 3) = \int_3^4 \frac{3}{4}(1-(x-3)^2)\,dx$. Integral sa desne strane jednakosti može se rešiti uvođenjem smene $x - 3 = t$ i njegovim izračunavanjem dobijamo da je tražena verovatnoća 0.5.

(c) Za $x \leq 2$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$,

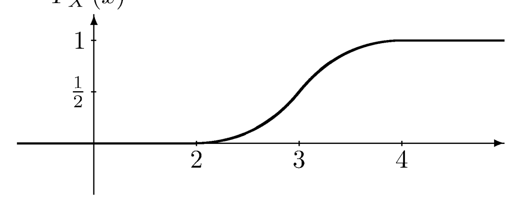
a za $x > 4$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_2^4 \frac{3}{4}(1-(t-3)^2)\,dt + \int_4^x 0\,dt = 1.$

Posmatrajmo $x \in (2, 4]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_2^x (-8+6t-t^2)\,dt = \\ &= \frac{3}{4}(-8t + 3t^2 - \frac{1}{3}t^3)\Big|_2^x = \frac{3}{4}(\frac{20}{3} - 8x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}) \end{aligned}$$

Dakle, funkcija raspodele i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ -\frac{x^3}{4} + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$



---

[102] *Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata" autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \leq x \leq 10, \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

(a) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti" više od 6 minuta?

(b) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti" između 3 i 8 minuta?

(c) Naći funkciju raspodele F_X.

(d) Grafički predstaviti funkcije φ_X i F_X, a zatim obeležiti $\mathsf{P}(X < 6)$.

Rešenje:

(a) Verovatnoća događaja da će na čekanje „izgubiti" više od 6 minuta je

$$\mathsf{P}(X > 6) = \int_6^{10} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x)\,dx = (\frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2)\Big|_6^{10} = 0.32.$$

(b) Uočimo da je gustina različito definisana na intervalima $[0, 5)$ i $[5, 10]$, a zatim slično kao pod (a), dobijamo da je tražena verovatnoća

$$\mathsf{P}(3 \leq X \leq 8) = \int_3^8 \varphi_X(x)\,dx = \int_3^5 \frac{1}{25}x\,dx + \int_5^8 (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{50}\Big|_3^5 + (\frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50})\Big|_5^8 = 0.74$$

(c) Za $x \le 0$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$

Ako je $x > 10$ tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{25} t\,dt + \int_{5}^{10} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t)\,dt + \int_{10}^{x} 0\,dt = 1.$

Za $x \in (0,5]$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{25} t\,dt = \frac{x^2}{50}.$

Ako je $x \in (5,10]$ tada je

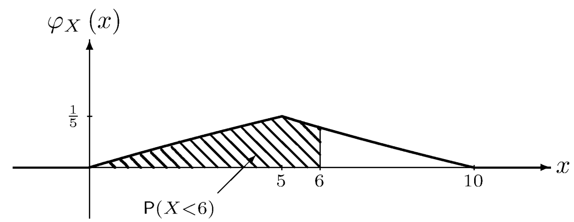
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{25} t\,dt + \int_{5}^{x} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t)\,dt =$

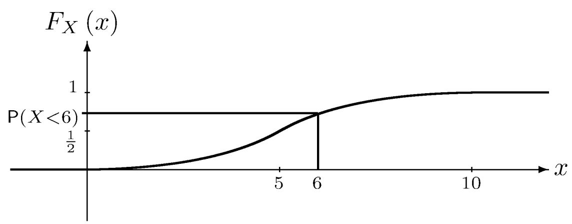
$= \left.\frac{t^2}{50}\right|_0^5 + \left.(\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{50})\right|_5^x = -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2.$

Dakle, funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{50}, & 0 < x \le 5, \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & 5 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





---

[103] *Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom raspodele*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}), & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

(a) *Naći funkciju gustine za* X.

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(X \le 1)$ *i* $\mathsf{P}(1 < X \le 3)$.

Rešenje:

(a) Kako je poznata funkcija raspodele F_X, gustinu ćemo naći pomoću relacije (2.14), koja važi u svim tačkama u kojima je gustina neprekidna. Za $x \in (0,4]$ je

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x})\right)' = \frac{1}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}) + \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4} \cdot (-\frac{4}{x^2}) = \frac{1}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}) - \frac{1}{4}$$

Dakle,

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x}, & x \in (0,4] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) Po definiciji funkcije raspodele je $\mathsf{P}(X \le 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}(1 + \ln 4)$. Slično je $\mathsf{P}(1 < X \le 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{3}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}(1 + \ln 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{16}{27} \approx 0.37.$

---

[104] *Neprekidna slučajna promenljiva* X *data je funkcijom raspodele:*

$$F_X(x) = \begin{cases} b, & x \le 1, \\ \frac{(x-1)^3}{27}, & 1 < x \le 4, \\ 3a, & x > 4. \end{cases}$$

Odrediti konstante a *i* b *i naći gustinu za* X.

Rešenje: Konstante a i b određujemo na osnovu osobina $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a = 1$, dakle $a = \frac{1}{3}$ i $b = 0$.

Koristeći (2.14) dobijamo za $x \in (1,4]$

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{27}\right)' = \frac{3(x-1)^2}{27} = \frac{(x-1)^2}{9},$$

te je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9}, & x \in (1,4], \\ 0, & x \notin (1,4]. \end{cases}$$

---

[105] *Neka je* X *vreme (izraženo u satima) između dolaska dva klijenta u banku i neka* X *ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom* $a = 0.2$.

(a) *Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive* X. *Na grafiku funkcije gustine predstaviti* $\mathsf{P}(X \ge 0.2)$.

(b) *Kolika je verovatnoća da će između dolaska dva klijenta proteći najviše 30 minuta?*

(c) *Izračunati* $\mathsf{P}(0.4 \le X \le 1)$ *i* $\mathsf{P}(X \ge 0.2)$.

Rešenje:

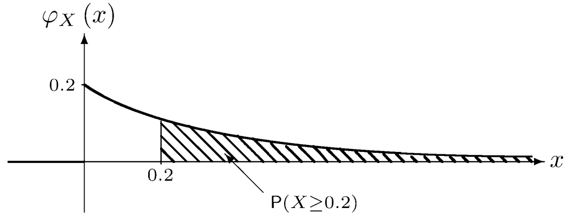
(a) Kako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$, tj. $X : \mathcal{E}(0.2)$, njena funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.2x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Gustina slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \end{cases}$$

a grafici funkcija φ_X i F_X su



(b) Verovatnoća traženog događaja je

$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-0.2 \cdot 0.5} = 1 - e^{-0.1} = 1 - 0.9048 = 0.0952.$

(c) Na osnovu (2.13) i (2.12) dobijamo da je

$\mathsf{P}(0.4 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0.4) = 1 - e^{-0.2 \cdot 1} - (1 - e^{-0.2 \cdot 0.4}) =$
$= e^{-0.08} - e^{-0.2} = 0.9231 - 0.8187 = 0.1044,$

$\mathsf{P}(X \geq 0.2) = 1 - \mathsf{P}(X < 0.2) = 1 - F_X(0.2) = 1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 0.2}) =$
$= e^{-0.04} = 0.9608.$

---

[106] *Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, $X : \mathcal{E}(1)$.*

(a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(-2)$, $F_X(4)$, $\mathsf{P}(|X| \leq 3)$ i $\mathsf{P}(0.2 \leq 2X - 1 < 7)$.*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

(b) $F_X(-2) = 0$, $F_X(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.9817$, a tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(|X| \leq 3) = \mathsf{P}(-3 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-3) = 1 - e^{-3} - 0 \approx 0.95,$
$\mathsf{P}(0.2 \leq 2X - 1 < 7) = \mathsf{P}(1.2 \leq 2X < 8) = \mathsf{P}(0.6 \leq X < 4) = F_X(4) - F_X(0.6) =$
$= 1 - e^{-4} - (1 - e^{-0.6}) \approx 0.9817 - 0.4512 = 0.5305.$

---

[107] *Slučajna promenljva Y koja predstavlja kašnjenje voza (izraženo u satima) ima uniformnu raspodelu, $Y : \mathcal{U}(0, 2)$.*

(a) *Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive Y. Na grafiku funkcije gustine predstaviti $\mathsf{P}(0.2 \leq Y \leq 1.8)$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta?*

(c) *Izračunati $\mathsf{P}(Y \leq 0.5)$, $\mathsf{P}(0.2 \leq Y \leq 1.8)$ i $\mathsf{P}(Y \geq 1.7)$.*

Rešenje:

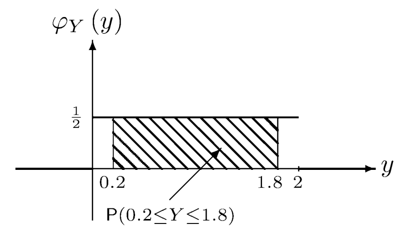
(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive Y je

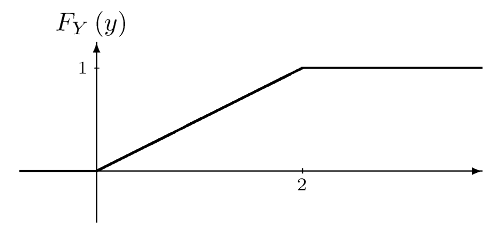
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 < y \leq 2, \\ 1, & y > 2, \end{cases}$$

a njena gustina je

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0, 2) \\ \frac{1}{2}, & y \in (0, 2) \end{cases}.$$

Grafici ove dve funkcije su





(b) Verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta je
$\mathsf{P}(Y \geq \frac{3}{4}) = 1 - \mathsf{P}(Y < \frac{3}{4}) = 1 - F_Y\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{8} = 0.625.$

(c) Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(Y \leq 0.5) = F_Y(0.5) = \frac{0.5}{2} = 0.25.$
$\mathsf{P}(0.2 \leq Y \leq 1.8) = F_Y(1.8) - F_Y(0.2) = \frac{1.8}{2} - \frac{0.2}{2} = 0.8,$
dok je $\mathsf{P}(Y \geq 1.7) = 1 - \mathsf{P}(Y < 1.7) = 1 - F_Y(1.7) = 1 - \frac{1.7}{2} = 0.15.$

---

[108] *Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-3; 5)$.*

(a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(0)$, $\mathsf{P}(|X - 3| \leq 5)$ i $\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10)$.*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-3;5), \\ \frac{1}{8}, & x \in (-3;5), \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ \frac{x+3}{8}, & -3 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

(b) $F_X(0) = \frac{0+3}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$, a tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(|X-3| \le 5) = \mathsf{P}(-5 \le X-3 \le 5) = \mathsf{P}(-2 \le X \le 8) = F_X(8) - F_X(-2) =$

$= 1 - \frac{-2+3}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875,$

$\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10) = \mathsf{P}(-1 < -X < 8) = \mathsf{P}(-8 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-8) =$

$= \frac{1+3}{8} - 0 = \frac{1}{2} = 0.5.$

---

[109] *Slučajna promenljiva X predstavlja dužinu rada motora izraženu u hiljadama sati. Neka X ima Vejbulovu raspodelu sa parametrima $\alpha = 2$ i $\beta = 2$.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će motor raditi bar 6 hiljada sati?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati?*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2} x e^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases}$$

Tražena verovatnoća je

$\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \le 6) = 1 - F_X(6) = 1 - (1 - e^{-9}) = 0.999877.$

(b) Verovatnoća događaja da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati je

$\mathsf{P}(2 \le X \le 3) = F_X(3) - F_X(2) = 1 - e^{-\frac{9}{4}} - (1 - e^{-1}) = 0.2624802.$

---

[110] *Neka slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Izračunati sledeće verovatnoće:*

(a) $\mathsf{P}(Z \le 2.17)$ (b) $\mathsf{P}(0 \le Z \le 1)$ (c) $\mathsf{P}(-2.5 \le Z)$

(d) $\mathsf{P}(1.3 \le Z \le 2.17)$ (e) $\mathsf{P}(-0.4 \le Z \le 1)$ (f) $\mathsf{P}(-2 \le Z < 1.1)$

(g) $\mathsf{P}(|Z| \le 1.2)$ (h) $\mathsf{P}(Z \le 4.4)$ (j) $\mathsf{P}(Z \le -1.01)$

Rešenje:

Prilikom rešavanja ovog i narednih zadataka korišćene su statističke tablice normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$ (vidi [8]). Takođe se koriste i sledeće osobine funkcije raspodele $\Phi(x)$ slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom:

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ kao i $\Phi(|Z| < x) = 2\Phi(x) - 1.$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\dots$	0.07	$\dots$
$\vdots$		$\downarrow$	
2.1	$\rightarrow$	0.985	
$\vdots$			

Dakle, $\Phi(2.17) = 0.985$.

(a) $\mathsf{P}(Z \le 2.17) = \Phi(2.17) = 0.985.$

(b) $\mathsf{P}(0 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413.$

(c) $\mathsf{P}(-2.5 \le Z) = 1 - \mathsf{P}(Z < -2.5) = 1 - \Phi(-2.5) = 1 - (1 - \Phi(2.5)) =$

$= \Phi(2.5) = 0.9938.$

(d) $\mathsf{P}(1.3 \le Z \le 2.17) = \Phi(2.17) - \Phi(1.3) = 0.985 - 0.9032 = 0.0818.$

(e) $\mathsf{P}(-0.4 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.4) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.4)) = \Phi(1) + \Phi(0.4) - 1 =$

$= 0.8413 + 0.6554 - 1 = 0.4967.$

(f) $\mathsf{P}(-2 \le Z < 1.1) = \Phi(1.1) - \Phi(-2) = \Phi(1.1) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1.1) + \Phi(2) - 1 =$

$= 0.8643 + 0.9772 - 1 = 0.8415$

(g) $\mathsf{P}(|Z| \le 1.2) = \mathsf{P}(-1.2 \le Z \le 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.2)) =$

$= 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698.$

(h) $\mathsf{P}(Z \le 4.4) = \Phi(4.4) \approx 1$

(j) $\mathsf{P}(Z \le -1.01) = \Phi(-1.01) = 1 - \Phi(1.01) = 1 - 0.8438 = 0.1562.$

---

[111] *Slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Odrediti c tako da važe jednakosti:*

(a) $\Phi(c) = 0.9838$ (b) $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.6718$ (c) $\mathsf{P}(c \le Z) = 0.121$

(d) $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.1231$ (e) $\mathsf{P}(-c \le Z \le c) = 0.668$ (f) $\mathsf{P}(|Z| \le c) = 0.6542$

Rešenje:

(a) $\Phi(c) = 0.9838 \;\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.9838) = 2.14$

(b) $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.6718 \;\Rightarrow$

$c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$

(c) $\mathsf{P}(c \le Z) = 0.121 \;\Rightarrow$

$1 - \mathsf{P}(Z < c) = 0.121 \;\Rightarrow$

$1 - \Phi(c) = 0.121 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = 0.879 \;\Rightarrow$

$c = \Phi^{-1}(0.879) = 1.17.$

x	$\dots$	0.04	0.05	$\dots$
$\vdots$		$\uparrow$	$\uparrow$	
0.4	$\leftarrow$	0.6700	0.6736	
$\vdots$				

Dakle, $c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$, kao aritmetička sredina brojeva 0.44 i 0.45.

(d) Kako vrednost funkcije raspodele 0.1231 ne pronalazimo u tablicama ni za jedno c, koristićemo činjenicu da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, dakle : $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.1231$

$\Rightarrow\; \Phi(c) = 0.1231 \;\Rightarrow\; 1 - \Phi(-c) = 0.1231 \;\Rightarrow\; \Phi(-c) = 0.8769$

$\Rightarrow\; -c = \Phi^{-1}(0.8769) = 1.16 \;\Rightarrow\; c = -1.16.$

(e) $\mathsf{P}(-c \le Z \le c) = 0.668 \;\Rightarrow\; 2\Phi(c) - 1 = 0.668 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = \frac{1.668}{2}$

$\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.834) = 0.97.$

(f) $\mathsf{P}(|Z| \le c) = 0.6542 \;\Rightarrow\; 2\Phi(c) - 1 = 0.6542 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = \frac{1.6542}{2}$

$\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.8271) = 0.945.$

---

[112] *Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(80,10)$. Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(X \le 100)$, $\mathsf{P}(70 \le X)$, $\mathsf{P}(65 \le X \le 100)$ i $\mathsf{P}(|X - 80| \le 10)$.*

Rešenje:

$X : \mathcal{N}(80,10) \;\Rightarrow\; X^* = \frac{X-80}{10} : \mathcal{N}(0,1).$

$\mathsf{P}(X \le 100) = \mathsf{P}(\frac{X-80}{10} \le \frac{100-80}{10}) = \mathsf{P}(X^* \le 2) = \Phi(2) = 0.9773.$

$\mathsf{P}(70 \le X) = \mathsf{P}(\frac{70-80}{10} \le \frac{X-80}{10}) = \mathsf{P}(-1 \le X^*) = 1 - \mathsf{P}(X^* < -1) =$
$= 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = 0.8413.$

$\mathsf{P}(65 \le X \le 100) = \mathsf{P}(\frac{65-80}{10} \le \frac{X-80}{10} \le \frac{100-80}{10}) = \mathsf{P}(-1.5 \le X^* \le 2) =$
$= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9773 + 0.9332 - 1 = 0.9105.$

$\mathsf{P}(|X - 80| \le 10) = \mathsf{P}(-10 \le X - 80 \le 10) = \mathsf{P}(-\frac{10}{10} \le \frac{X-80}{10} \le \frac{10}{10}) =$
$= \mathsf{P}(-1 \le X^* \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$

---

[113] *Pretpostavimo da pH vrednost zemljišta jednog regiona ima normalnu raspodelu sa $m = 6$ i $\sigma = 0.1$. Ako je sa tog područja uzet jedan uzorak zemljišta, naći verovatnoću da uzeti uzorak ima pH vrednost*

(a) *između 5.9 i 6.15,*

(b) *veću od 6,*

(c) *najviše 5.95.*

Rešenje:

Obeležimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja pH vrednost zemljišta. Kako X ima normalnu raspodelu $X : \mathcal{N}(6, 0.1)$ to $X^* = \frac{X-6}{0.1} : \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) $\mathsf{P}(5.9 \le X \le 6.15) = \mathsf{P}(\frac{5.9-6}{0.1} \le \frac{X-6}{0.1} \le \frac{6.15-6}{0.1}) = \mathsf{P}(-1 \le X^* \le 1.5) =$
$= \Phi(1.5) - \Phi(-1) = \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) =$
$= 0.9332 + 0.8413 - 1 = 0.7745.$

(b) $\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \le 6) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-6}{0.1} \le \frac{6-6}{0.1}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \le 0) =$
$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5.$

(c) $\mathsf{P}(X \le 5.95) = \mathsf{P}(X^* \le \frac{5.95-6}{0.1}) = \mathsf{P}(X^* \le -0.5) = \Phi(-0.5) =$
$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$

---

[114] *Neka X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(25, 0.6)$. Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(X \le 15)$, $\mathsf{P}(20 \le X)$ i $\mathsf{P}(10 \le X \le 22)$ koristeći aproksimaciju binomne raspodele normalnom raspodelom.*

Rešenje:

$X : \mathcal{B}(25, 0.6) \quad n \cdot p = 25 \cdot 0.6 = 15, \ \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{6},$

$\to \ X^* = \frac{X-15}{\sqrt{6}} : \mathcal{N}(0, 1).$

$\mathsf{P}(X \le 15) = \mathsf{P}(\frac{X-15}{\sqrt{6}} \le \frac{15-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(X^* \le 0) = \Phi(0) = 0.5.$

$\mathsf{P}(20 \le X) = 1 - \mathsf{P}(X < 20) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{20-15}{\sqrt{6}}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 2.04124) =$
$= 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207.$

$\mathsf{P}(10 \le X \le 22) = \mathsf{P}(\frac{10-15}{\sqrt{6}} \le X^* \le \frac{22-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(-2.04124 \le X^* \le 2.8577) =$
$= \Phi(2.86) - \Phi(-2.04) = 0.9979 + 0.9793 - 1 = 0.9772.$

---

[115] *Dinar se baca 400 puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj palih pisama. Koristeći aproksimaciju normalnom raspodelom izračunati verovatnoće*

(a) *da će broj palih pisama biti veći od broja palih grbova,*

(b) *da će broj palih pisama biti najviše 185.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$, $n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$, $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$, , tako da $X^* = \frac{X-200}{10} : \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 200) = 1 - \mathsf{P}(X \le 200) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{200-200}{10}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 0) =$
$= 1 - \Phi(0) = 0.5,$

(b) $\mathsf{P}(X \le 185) = \mathsf{P}(X^* \le \frac{185-200}{10}) = \mathsf{P}(X^* \le -1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) =$
$= 0.0668.$

---

[116] *Prosečno 4 % proizvoda je škart. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj ispravnih proizvoda od 150 posmatranih. Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu izračunati verovatnoću*

(a) *da će više od 140 proizvoda biti ispravno,*

(b) *da će više od 5 proizvoda biti neispravno.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj ispravnih proizvoda ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(150, 0.96)$, $p = 0.96$, $q = 0.04$, $n = 150$, pa je $np = 144$, $\sqrt{npq} = \sqrt{5.76} = 2.4$. Na osnovu Moavr-Laplasove teoreme $X^* = \frac{X-144}{2.4}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu, tj. $\mathcal{N}(0, 1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 140) = 1 - \mathsf{P}(X \le 140) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-144}{2.4} \le \frac{140-144}{2.4}) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* \le -1.67) =$
$= 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) = 0.9525.$

(b) Primetimo da ako je X broj ispravnih proizvoda tada je $150 - X$ broj neispravnih proizvoda i obrnuto. Zaključujemo da je događaj $A -$ „ više od 5 proizvoda je neispravno" jednak događaju $B -$ „ manje od 145 proizvoda je ispravno", tj. $A = B$. Dakle,
$\mathsf{P}(150 - X > 5) = \mathsf{P}(X < 145) = \mathsf{P}(X^* < \frac{145-144}{2.4}) \approx \mathsf{P}(X^* < 2.08) = \Phi(2.08) =$ 09812.

---

[117] *Prosečno sedamdeset posto studenata traži konsultacije za vreme rada u računskom centru. Neka je u toku dana 100 studenata radilo u računskom centru.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će više od polovine broja studenata tražiti konsultacije?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti manji od 72?*

(c) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti između 70 i 80?*

Ova lekcija je posuđena iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

2.4 Transformacije i brojne karakteristike slučajnih promenljivih

Transformacije slučajnih promenljivih

Neka je X slučajna promenljiva i neka je g funkcija koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Tada je $Y = g(X(\omega))$, kraće pišemo $Y = g(X)$, slučajna promenljiva koja je dobijena transformacijom slučajne promenljive X.

Ako je X diskretnog tipa sa zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \dots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \dots & \mathsf{p}(x_m) & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

tada je očigledno $Y = g(X)$ takođe slučajna promenljiva diskretnog tipa. Neka je $\mathcal{R}_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, tj.

$$g : \{x_1, x_2, \dots\} \to \{y_1, y_2, \dots\}. \tag{2.38}$$

Sa $\mathsf{p}(y_j)$ označavamo verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u y_j, tada je

$$\mathsf{p}(y_j) = \mathsf{P}(Y = y_j) = \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} \mathsf{p}(x_i) = \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} \mathsf{P}(X = x_i). \tag{2.39}$$

Tada je zakon raspodele slučajne promenljive Y dobijene transformacijom slučajne promenljive X

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots \\ \mathsf{p}(y_1) & \mathsf{p}(y_2) & \dots & \mathsf{p}(y_k) & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Ako je X neprekidnog tipa, sa funkcijom gustine φ_X i funkcijom raspodele F_X, i g monotono rastuća neprekidna funkcija, tada je

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \tag{2.41}$$

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot (g^{-1}(y))'. \tag{2.42}$$

Ako je X neprekidnog tipa, sa funkcijom gustine φ_X i funkcijom raspodele F_X, i g monotono opadajuća neprekidna funkcija, tada je

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \tag{2.43}$$

$$\varphi_Y(y) = -\varphi_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot (g^{-1}(y))'. \tag{2.44}$$

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tj. $g(x, y) = z$, tada slučajnu promenljivu (X, Y) transformišemo u jednu slučajnu promenljivu, $Z = g(X, Y)$, čiji je skup vrednosti $\mathcal{R}_Z = \{z_1, z_2, \dots\}$, tj.

$$g : \mathcal{R}_{X,Y} \longrightarrow \{z_1, z_2, \dots\}, \tag{2.45}$$

a odgovarajuće verovatnoće

$$\mathsf{p}(z_k) = \mathsf{P}(Z = z_k) = \sum_{i,j\,:\,g(x_i,y_j)=z_k} \mathsf{p}(x_i, y_j). \tag{2.46}$$

Brojne karakteristike slučajnih promenljivih

Matematičko očekivanje $\mathsf{E}(X)$ slučajne promenljive X je broj definisan sa

$$\mathsf{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i\, \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi_X(x)\, dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.47}$$

pod uslovom da odgovarajući red, odnosno inetegral apsolutno konvergira.

Za matematičko očekivanje važe sledeće osobine

$$\mathsf{E}(c) = c, \quad \text{gde je } c \text{ konstanta.} \tag{2.48}$$

$$\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y), \text{za sve slučajne promenljive } X \text{ i } Y. \tag{2.49}$$

$$\mathsf{E}(cX) = c\ \mathsf{E}(X), \quad \text{gde je } c \text{ konstanta.} \tag{2.50}$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je

$$\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\ \mathsf{E}(Y). \tag{2.51}$$

Ako je $Y = g(X)$ transformacija slučajne promenljive X tada je

$$\mathsf{E}(Y) = \begin{cases} \sum\limits_i g(x_i)\, \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \varphi_X(x)\, dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.52}$$

U specijalnom slučaju, $Y = X^\alpha$ važi

$$\mathsf{E}(Y) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^\alpha\, \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\alpha\, \varphi_X(x)\, dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.53}$$

$\mathsf{E}\left(X^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$ se nazivaju momenti reda k slučajne promenljive X.

Disperzija $\mathsf{D}(X)$ slučajne promenljive X je definisana sa

$$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}(X))^2\right). \tag{2.54}$$

Često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2. \tag{2.55}$$

Standardno odstupanje slučajne promenljive se definiše kao kvadratni koren disperzije.

Za disperziju važe sledeće osobine

$$\mathsf{D}(c) = 0, \quad \text{za svaku konstantu } c. \tag{2.56}$$

$$\mathsf{D}(X) \geq 0. \tag{2.57}$$

$$\mathsf{D}(cX) = c^2\ \mathsf{D}(X), \quad \text{gde je } c \text{ konstanta.} \tag{2.58}$$

$$\mathsf{D}(X + c) = \mathsf{D}(X), \quad \text{gde je } c \text{ konstanta.} \tag{2.59}$$

Za nezavisne slučajne promenljive X i Y je: $\mathsf{D}(X + Y) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{D}(Y)$. (2.60)

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = n\,p, \qquad \mathsf{D}(X) = n\,p\,q\,. \tag{2.61}$$

Ako slučajna promenljiva X ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \lambda, \qquad \mathsf{D}(X) = \lambda\,. \tag{2.62}$$

Ako slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(p)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{p}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{q}{p^2}\,. \tag{2.63}$$

Ako slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{a+b}{2}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12}\,. \tag{2.64}$$

Ako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(a)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{a}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{1}{a^2}\,. \tag{2.65}$$

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = m, \qquad \mathsf{D}(X) = \sigma^2\,. \tag{2.66}$$

---

[128] *Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele* $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.
Neka je $Y = 2X+3$, $\ Z = X^2\ $ *i* $\ T = X^3 - X^2$.

(a) *Naći zakon raspodele za slučajne promenljive Y, Z i T.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje za slučajne promenljive X, Y, Z i T.*

(c) *Izračunati disperziju za slučajne promenljive X, Y, Z i T.*

Rešenje:

(a) Primenom (2.38) imamo da je $\mathcal{R}_Y = \{1, 9, 11\}$ skup vrednosti slučajne promenljive $Y = 2X+3$. Korišćenjem (2.39) dobijamo da su tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Y=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Y=11) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_Z = \{1, 9, 16\}$ njen skup vrednosti, pa primenom (2.39) dobijamo da su odgovarajuće verovatnoće

$\mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Z=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Z=16) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu $T = X^3 - X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_T = \{-2, 18, 48\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T=-2) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(T=18) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(T=48) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

i tražena slučajna promenljiva je $T : \begin{pmatrix} -2 & 18 & 48 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

(b) Prvo ćemo izračunati matematičko očekivanje za sve date slučajne promenljive primenom (2.47)

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(X) = -1\cdot 0.4 + 3\cdot 0.5 + 4\cdot 0.1 = 1.5,\\
&\mathsf{E}(Y) = 1\cdot 0.4 + 9\cdot 0.5 + 11\cdot 0.1 = 6,\\
&\mathsf{E}(Z) = 1\cdot 0.4 + 9\cdot 0.5 + 16\cdot 0.1 = 6.5,\\
&\mathsf{E}(T) = -2\cdot 0.4 + 18\cdot 0.5 + 48\cdot 0.1 = 13.
\end{aligned}$$

Korišćenjem osobina (2.49), (2.50) i (2.53) matematičkog očekivanja, zadatak možemo uraditi i na drugi način[3]

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(2X+3) = 2\ \mathsf{E}(X) + 3 = 2\cdot 1.5 + 3 = 6,\\
&\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}\left(X^2\right) = (-1)^2\cdot 0.4 + 3^2\cdot 0.5 + 4^2\cdot 0.1 = 6.5,\\
&\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}\left(X^3 - X^2\right) = \mathsf{E}\left(X^3\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right) =\\
&\qquad = (-1)^3\cdot 0.4 + 3^3\cdot 0.5 + 4^3\cdot 0.1 - 6.5 = 13.
\end{aligned}$$

(c) Korišćenjem (2.55) i (2.53) imamo da je

$$\begin{aligned}
&\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = 6.5 - 1.5^2 = 4.25,\\
&\mathsf{D}(Y) = \mathsf{E}\left(Y^2\right) - \mathsf{E}(Y)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 11^2\cdot 0.1) - 6^2 = 17,\\
&\mathsf{D}(Z) = \mathsf{E}\left(Z^2\right) - \mathsf{E}(Z)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 16^2\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25,\\
&\mathsf{D}(T) = \mathsf{E}\left(T^2\right) - \mathsf{E}(T)^2 = ((-2)^2\cdot 0.4 + 18^2\cdot 0.5 + 48^2\cdot 0.1) - 13^2 = 225.
\end{aligned}$$

Za slučajne promenljive Y i Z ćemo izračunati disperziju i na drugi način, koristeći osobine disperzije (2.58) i (2.59) i osobinu matematičkog očekivanja (2.53),

$$\begin{aligned}
&\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+3) = 2^2\ \mathsf{D}(X) = 4\cdot 4.25 = 17,\\
&\mathsf{D}(Z) = \mathsf{D}\left(X^2\right) = \mathsf{E}\left(\left(X^2\right)^2\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right)^2 = \mathsf{E}\left(X^4\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right)^2 =\\
&= ((-1)^4\cdot 0.4 + 3^4\cdot 0.5 + 4^4\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25.
\end{aligned}$$

---

[129] *Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele*

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X < 0.5)$, $\quad \mathsf{P}(2X+1 < 3)$, $\quad \mathsf{P}\left(X^2 < 1.2\right)\quad$ *i* $\mathsf{P}(2 - X < -1)$.

(b) *Naći zakon raspodele za slučajnu promenljivu $Y = X^2$ i slučajnu promenljivu $Z = X^2 + 1$.*

(c) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive X, Y i Z.*

[3]Ovaj način je prikladan za izračunavanje matematičkog očekivanja slučajnih promenljivih čije zakone raspodela nemamo, a one su dobijene transformacijom slučajne promenljive čije očekivanje je poznato.

Rešenje:

(a) Tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(X<0.5)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=0)=0.7,$
$\mathsf{P}(2X+1<3)=\mathsf{P}(X<1)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=0)=0.7,$
$\mathsf{P}\left(X^2<1.2\right)=\mathsf{P}(-1.2<X<1.2)=$
$=\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=1)=0.8,$
$\mathsf{P}(2-X<-1)=\mathsf{P}(X>3)=0.$

(b) Primenjujući (2.38) dobijamo da je $\mathcal{R}_Y=\{0,1,4\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, pa primenom (2.39) izračunavamo potrebne verovatnoće

$\mathsf{P}(Y=0)=\mathsf{P}(X=0)=0.4,$
$\mathsf{P}(Y=1)=\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=1)=0.2+0.2=0.4,$
$\mathsf{P}(Y=4)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=2)=0.1+0.1=0.2,$

tako da je traženi zakon raspodele $Y:\begin{pmatrix}0&1&4\\0.4&0.4&0.2\end{pmatrix}$.

Analogno, dobijamo da je $\mathcal{R}_Z=\{1,2,5\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Z, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(Z=1)=\mathsf{P}(X=0)=0.4,$
$\mathsf{P}(Z=2)=\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=1)=0.2+0.2=0.4,$
$\mathsf{P}(Z=5)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=2)=0.1+0.1=0.2,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z:\begin{pmatrix}1&2&5\\0.4&0.4&0.2\end{pmatrix}$.

(c) Primenom (2.47), (2.53) i (2.55) računamo matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive $X,\ Y$ i Z

$\mathsf{E}(X)=-2\cdot0.1-1\cdot0.2+0\cdot0.4+1\cdot0.2+2\cdot0.1=0,$
$\mathsf{E}\left(X^2\right)=(-2)^2\cdot0.1+(-1)^2\cdot0.2+0^2\cdot0.4+1^2\cdot0.2+2^2\cdot0.1=1.2,$
$\mathsf{D}(X)=1.2-0^2=1.2,$
$\mathsf{E}(Y)=0\cdot0.4+1\cdot0.4+4\cdot0.2=1.2,$
$\mathsf{E}\left(Y^2\right)=0^2\cdot0.4+1^2\cdot0.4+4^2\cdot0.2=3.6,$
$\mathsf{D}(Y)=3.6-1.2^2=2.16,$
$\mathsf{E}(Z)=1\cdot0.4+2\cdot0.4+5\cdot0.2=2.2,$
$\mathsf{E}\left(Z^2\right)=1^2\cdot0.4+2^2\cdot0.4+5^2\cdot0.2=7,$
$\mathsf{D}(Z)=7-2.2^2=2.16.$

Koristeći (2.48), (2.49) i (2.59) matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Z možemo izračunati i na drugi način

$\mathsf{E}(Z)=\mathsf{E}\left(X^2+1\right)=\mathsf{E}\left(X^2\right)+1=1.2+1=2.2,$
$\mathsf{D}(Z)=\mathsf{D}\left(X^2+1\right)=\mathsf{D}\left(X^2\right)=\mathsf{D}(Y)=2.16.$

---

[130] *Slučajna promenljiva X je data zakonom raspodele* $X:\begin{pmatrix}-\pi&-\frac{\pi}{2}&0&\frac{\pi}{2}&\pi\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&\frac{2}{8}\end{pmatrix}$.
Izračunati zakon raspodele, matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y=\sin X$.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y=\{-1,0,1\}$, a odgovarajuće verovatnoće računamo primenom (2.39).

$\mathsf{P}(Y=-1)=\mathsf{P}\left(X=-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{8},$
$\mathsf{P}(Y=0)=\mathsf{P}(X=-\pi)+\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=\pi)=\frac{6}{8},$
$\mathsf{P}(Y=1)=\mathsf{P}\left(X=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{8},$

tako da je traženi zakon raspodele $Y:\begin{pmatrix}-1&0&1\\\frac{1}{8}&\frac{6}{8}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$.

Dalje, imamo da je $\mathsf{E}(Y)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=0,\ \mathsf{E}\left(Y^2\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},\ \mathsf{D}(Y)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}.$

---

[131] *Strelac promašuje metu sa verovatnoćom $\frac{1}{20}$.*

(a) *Ako strelac gađa u metu 100 puta, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X koja predstavlja broj promašaja.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Y kojom se može aproksimirati slučajna promenljiva X iz ovog zadatka.*

(c) *Ako strelac gađa u metu dok ne promaši, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Z koja predstavlja broj gađanja.*

(d) *Strelac gađa metu dok ne promaši. Slučajna promenljiva T uzima vrednost 1 ako je strelac promašio metu u parnom po redu gađanju, a vrednost -1 ako je strelac promašio metu u neparnom po redu gađanju. Naći matematičko očekivanje i disperziju za slučajnu promenljivu T.*

Rešenje: Strelac promašuje metu sa verovatnoćom $p=\frac{1}{20}$, a pogađa sa verovatnoćom $q=\frac{19}{20}$.

(a) Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(100,\frac{1}{20})$ raspodelu, tako da na osnovu (2.61) imamo da je $\mathsf{E}(X)=100\cdot\frac{1}{20}=5$ i $\mathsf{D}(X)=100\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}=\frac{19}{4}$.

(b) Primenom (2.8) imamo da za $\lambda=100\cdot\frac{1}{20}=5$ slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(5)$ raspodelu tako da je (vidi (2.62)) $\mathsf{E}(Y)=5$ i $\mathsf{D}(Y)=5$.

(c) Slučajna promenljiva Z ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{1}{20})$ raspodelu, tako da na osnovu (2.63) sledi da je $\mathsf{E}(Z)=\dfrac{1}{\frac{1}{20}}=20$ i $\mathsf{D}(Z)=\dfrac{\frac{19}{20}}{\frac{1}{20^2}}=380$.

(d) Očigledno je $\mathcal{R}_T=\{-1,1\}$ skup vrednosti slučajne promenljive T, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T=-1)=\mathsf{P}(Z=1)+\mathsf{P}(Z=3)+\mathsf{P}(Z=5)+\cdots=$
$=\frac{1}{20}+(\frac{19}{20})^2\cdot\frac{1}{20}+(\frac{19}{20})^4\cdot\frac{1}{20}+\cdots=$
$=\frac{1}{20}\cdot(1+(\frac{19}{20})^2+(\frac{19}{20})^4+\cdots)=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{1-(\frac{19}{20})^2}=\frac{20}{39},$

$\mathsf{P}(T=1)=1-\mathsf{P}(T=-1)=\frac{19}{39},$

tako da slučajna promenljiva T ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{20}{39} & \frac{19}{39} \end{pmatrix}$, a tražene numeričke karakteristike su

$\mathsf{E}(T) = -\frac{20}{39} + \frac{19}{39} = -\frac{1}{39}$, $\mathsf{E}(X^2) = \frac{20}{39} + \frac{19}{39} = 1$, $\mathsf{D}(X) = 1 - (-\frac{1}{39})^2 = \frac{1520}{1521}$.

---

[132] *Dve mašine nezavisno jedna od druge proizvode istu vrstu proizvoda. Slučajna promenljiva X predstavlja broj škartova u toku jednog dana na prvoj mašini, a slučajna promenljiva Y broj škartova na drugoj mašini. Zakoni raspodela za X i Y su*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Naći zakone raspodela za slučajne promenljive $Z = X^2$, $T = 2Y+1$, $U = X+Y$ i $V = XY$.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za X, Y, Z, T, U i V.*

Rešenje:

(a) Primenom (2.38) i (2.45) dobijamo da su $\mathcal{R}_Z = \{0,1,4,9\}$, $\mathcal{R}_T = \{1,3,5\}$, $\mathcal{R}_U = \{0,1,2,3,4,5\}$ i $\mathcal{R}_V = \{0,1,2,3,4,6\}$ skupovi vrednosti za slučajne promenljive X, Y, Z, T, U i V, redom.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ primenom (2.39) dobijamo odgovarajuće verovatnoće

$\mathsf{P}(Z=0) = \mathsf{P}(X=0) = 0.1$, $\quad \mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(X=1) = 0.6$
$\mathsf{P}(Z=4) = \mathsf{P}(X=2) = 0.2$, $\quad \mathsf{P}(Z=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.1$

tako da je traženi zakon raspodele $Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Primenom (2.39) dobijamo da je

$\mathsf{P}(T=1) = \mathsf{P}(Y=0) = 0.5$, $\quad \mathsf{P}(T=3) = \mathsf{P}(Y=1) = 0.3$
$\mathsf{P}(T=5) = \mathsf{P}(Y=2) = 0.2$,

tako da je traženi zakon raspodele $T : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Kako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, primenjujući (2.46) dobijamo tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(U=0) = \mathsf{P}(X=0, Y=0) = \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=0) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$,
$\mathsf{P}(U=1) = \mathsf{P}(X=0, Y=1) + \mathsf{P}(X=1, Y=0) =$
$= \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=1) + \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=0) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.33$,
$\mathsf{P}(U=2) = \mathsf{P}(X=0, Y=2) + \mathsf{P}(X=1, Y=1) + \mathsf{P}(X=2, Y=2) =$
$= 0.1 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.3$,
$\mathsf{P}(U=3) = \mathsf{P}(X=1, Y=2) + \mathsf{P}(X=2, Y=1) + \mathsf{P}(X=3, Y=0) =$
$= 0.6 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.23$,
$\mathsf{P}(U=4) = \mathsf{P}(X=2, Y=2) + \mathsf{P}(X=3, Y=1) =$
$= 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.07$,
$\mathsf{P}(U=5) = \mathsf{P}(X=3, Y=2) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$,

i traženi zakon raspodele je $U : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.05 & 0.33 & 0.3 & 0.23 & 0.07 & 0.02 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu V primenom (2.28) dobijamo tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(V=0) = \mathsf{P}(X=0, Y=0) + \mathsf{P}(X=0, Y=1) + \mathsf{P}(X=0, Y=2) +$
$+ \mathsf{P}(X=1, Y=0) + \mathsf{P}(X=2, Y=0) + \mathsf{P}(X=3, Y=0) =$
$= 0.1 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5 =$
$= 0.55$,
$\mathsf{P}(V=1) = \mathsf{P}(X=1, Y=1) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$,
$\mathsf{P}(V=2) = \mathsf{P}(X=1, Y=2) + \mathsf{P}(X=2, Y=1) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.18$,
$\mathsf{P}(V=3) = \mathsf{P}(X=3, Y=1) = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03$,
$\mathsf{P}(V=4) = \mathsf{P}(X=2, Y=2) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$,
$\mathsf{P}(V=6) = \mathsf{P}(X=3, Y=2) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$,

i tražen zakon raspodele slučajne promenljive

$$V : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0.55 & 0.18 & 0.18 & 0.03 & 0.04 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

(b) Koristeći (2.47), (2.53) i (2.55) dobijamo tražene numeričke karakteristike

$\mathsf{E}(X) = 0.6 + 0.4 + 0.3 = 1.3$,
$\mathsf{E}(X^2) = 0.6 + 0.8 + 0.9 = 2.3$,
$\mathsf{E}(Y) = 0.3 + 0.4 = 0.7$,
$\mathsf{E}(Y^2) = 0.3 + 0.8 = 1.1$,
$\mathsf{E}(Z) = 0.6 + 0.8 + 0.9 = 2.3$,
$\mathsf{E}(Z^2) = 0.6 + 0.32 + 0.9 = 1.82$,
$\mathsf{E}(T) = 0.5 + 0.9 + 1 = 2.4$,
$\mathsf{E}(T^2) = 0.5 + 2.7 + 5 = 8.2$,
$\mathsf{E}(U) = 0.33 + 0.6 + 0.69 + 0.28 + 0.1 = 2$,
$\mathsf{E}(U^2) = 0.33 + 1.2 + 2.07 + 1.12 + 0.5 = 5.22$,
$\mathsf{E}(V) = 0.18 + 0.36 + 0.09 + 0.16 + 0.12 = 0.91$,
$\mathsf{E}(V^2) = 0.18 + 0.72 + 0.27 + 0.64 + 0.72 = 2.53$,

$\mathsf{D}(X) = 0.61$, $\quad \mathsf{D}(Y) = 0.61$, $\quad \mathsf{D}(Z) = 0.61$,
$\mathsf{D}(T) = 2.44$, $\quad \mathsf{D}(U) = 1.22$, $\quad \mathsf{D}(V) = 1.7019$.

Primenom osobina (2.48), (2.49), (2.51) i (2.50) matematičkog očekivanja izračunaćemo matematičko očekivanje za slučajne promenljive T, U i V.

$\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}(2Y+1) = 2\ \mathsf{E}(Y) + 1 = 2 \cdot 0.7 + 1 = 2.4$,
$\mathsf{E}(U) = \mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) = 1.3 + 0.7 = 2$,
$\mathsf{E}(V) = \mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\ \mathsf{E}(Y) = 1.3 \cdot 0.7 = 0.91$.

Primenjujući (2.58), (2.59) i (2.60) izračunavamo disperzije za slučajne promenljive T i U.

$\mathsf{D}(T) = \mathsf{D}(2Y+1) = 4\ \mathsf{D}(Y) = 4 \cdot 0.61 = 2.44$,
$\mathsf{D}(U) = \mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{D}(Y) = 0.61 + 0.61 = 1.22$.

[133] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 2X + 1$.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Raspodela slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Na osnovu prethodne činjenice i definicije funkcije raspodele je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(2X+1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y-1}{2}) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y-1}{2} \le 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{2}\right)^2, & 0 < \frac{y-1}{2} \le 2 \\ 1, & \frac{y-1}{2} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ \frac{(y-1)^2}{16}, & 1 < y \le 5, \\ 1, & y > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Koristeći (2.47) dobijamo $\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^2 x\,\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

Na osnovu (2.53) dobijamo $\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_0^2 x^2\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2$.

Koristeći (2.55) dobijamo $\mathsf{D}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Iz (2.48) i (2.49) dobija se $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(2X+1) = 2\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(1) = 2\cdot\frac{4}{3} + 1 = \frac{11}{3}$, a kako je

$$\varphi_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (1,5], \\ \frac{y-1}{8}, & y \in (1,5], \end{cases}$$

i na osnovu (2.53) je

$\mathsf{E}(Y^2) = \int\limits_1^5 y^2\cdot\frac{y-1}{8}\,dy = \frac{1}{8}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^5 = \frac{1}{8}\left(\frac{625}{4} - \frac{125}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{43}{3}$.

Disperzija slučajne promenljive Y je $\mathsf{D}(Y) = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

Do istog rezultata može se doći pomoću osobina disperzije (2.58) i (2.59), tj.

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+1) = \mathsf{D}(2X) = 4\,\mathsf{D}(X) = \frac{8}{9}$.

[134] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Konstantu a određujemo tako da je zadovoljen uslov: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = 1$.

$$a\int\limits_1^4 (x-1)\,dx = a\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^4 = a\left(8 - 4 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}a = 1.$$

Dakle $a = \frac{2}{9}$.

Funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(3X-1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{3}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{3}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{3} \le 1 \\ \frac{(\frac{y+1}{3}-1)^2}{9}, & 1 < \frac{y+1}{3} \le 4 \\ 1, & \frac{y+1}{3} > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 2, \\ \frac{(y-2)^2}{81}, & 2 < y \le 11, \\ 1, & y > 11. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na osnovu (2.47) i (2.53) dobijamo

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^4 x\cdot\frac{2}{9}(x-1)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 3$.

$\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_1^4 x^2\cdot\frac{2}{9}(x-1)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4 = \frac{57}{6} = 9.5$.

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = 9.5 - 3^2 = 0.5$.

Koristeći osobine očekivanja i disperzije, dobijamo

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(3X-1) = 3\,\mathsf{E}(X) - 1 = 3\cdot 3 - 1 = 8$ i

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(3X-1) = 9\,\mathsf{D}(X) = 9\cdot 0.5 = 4.5$.

[135] *Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3}, & 1 < x \le 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Rešenje: Funkcija gustine slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1,8] \\ \frac{2}{9\sqrt[3]{x}}, & x \in (1,8]. \end{cases}$$

Na osnovu (2.47) i (2.53) dobija se

$$\mathsf{E}(X) = \int_1^8 x \cdot \frac{2}{9} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{2}{9}\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\,dx == \frac{2}{9}\,\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_1^8 = \frac{2}{15}(\sqrt[3]{8}^5 - \sqrt[3]{1}^5) = \frac{62}{15} \quad \text{i}$$

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int_1^8 x^2 \cdot \frac{2}{9} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{2}{9}\int_1^8 x^{\frac{5}{3}}\,dx == \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\,x^{\frac{8}{3}}\Big|_1^8 = \frac{1}{12}(\sqrt[3]{8}^8 - 1) = \frac{85}{4} = 21.25.$$

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \frac{85}{4} - \left(\frac{62}{15}\right)^2 \approx 4.165$.

---

[136] *Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je*

$$F_X(x) = \begin{cases} 3a-1 & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i naći gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y = -3X + 2$.*

Rešenje:

(a) Konstantu a određujemo na osnovu osobine $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a - 1 = 0$, dakle $a = \frac{1}{3}$, a na osnovu (2.14) dobijamo da je gustina slučajne promenljive X

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1], \\ 2x, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$, dok je $\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = 2\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive Y su

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(-3X+2) = -3\,\mathsf{E}(X) + 2 = -3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 0$ i

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(-3X+2) = 9\,\mathsf{D}(X) = 9 \cdot \frac{1}{18} = 0.5$.

---

[137] *Neprekidna slučajna promenljiva X ima gustinu*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,e], \\ \ln x, & x \in [1,e]. \end{cases}$$

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = eX - 1$.*

(b) *Izračunati očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Prvo ćemo odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X. Kako važi da je $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx$, za fiksirano $x \in (1,e]$ je

$$F_X(x) = \int_1^x \ln t\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln t \ \text{ i } \ dv = dt \\ du = \frac{dt}{t} \qquad v = t \end{array} \right\} =$$

$$= t\ln t|_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - t|_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Dakle, funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1 + x\ln\frac{x}{e}, & 1 < x \le e, \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

Sada ćemo po definiciji i na osnovu prethodnog rezultata odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive Y.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(eX - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{e}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{e}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{e} \le 1 \\ 1 + \frac{y+1}{e}\ln\frac{y+1}{e^2}, & 1 < \frac{y+1}{e} \le e \\ 1, & \frac{y+1}{3} > e \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & y \le e-1, \\ 1 + \frac{y+1}{e}\ln\frac{y+1}{e^2}, & e-1 < y \le e^2 - 1, \\ 1, & y > e^2 - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na osnovu (2.47) je

$$\mathsf{E}(X) = \int_1^e x \cdot \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln x \ \text{ i } \ dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Očekivanje za Y možemo izračunati pomoću osobina (2.48) i (2.49)

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(eX - 1) = e\,\mathsf{E}(X) - 1 = e \cdot \frac{e^2+1}{4} - 1 = \frac{e^3+e-4}{4} \approx 4.7$.

Kako je

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int_1^e x^2 \cdot \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln x \ \text{ i } \ dv = x^2dx \\ du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e \approx 4.575,$$

disperzija slučajne promenljive X je

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = 4.575 - (2.097)^2 \approx 0.1776.$

Koristeći (2.58) i (2.59) dobijamo

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(eX-1) = e^2\,\mathsf{D}(X) \approx 1.312.$

---

[138] *Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(2,4)$ raspodelu. Neka je slučajna promenljiva $Y = -2X+5$.*

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive Y.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje:

(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \frac{x-2}{2}, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Na osnovu prethodne činjenice i definicije funkcije raspodele sledi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y<y) = \mathsf{P}(-2X+5<y) = \mathsf{P}(X \ge -\tfrac{y-5}{2}) = \\ &= 1 - F_X\left(-\tfrac{y-5}{2}\right) = 1 - \begin{cases} 0, & -\frac{y-5}{2} \le 2, \\ \frac{-\frac{y-5}{2}-2}{2}, & 2 < -\frac{y-5}{2} \le 4, \\ 1, & -\frac{y-5}{2} > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le -3, \\ \frac{y+3}{4}, & -3 < y \le 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

odnosno slučajna promenljiva Y ima uniformnu raspodelu $Y : \mathcal{U}(-3,1)$.

(b) Na osnovu (2.64) dobijamo

$\mathsf{E}(X) = \frac{2+4}{2} = 3,\ \ \mathsf{D}(X) = \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{1}{3},\ \ \mathsf{E}(Y) = \frac{-3+1}{2} = -1$ i $\mathsf{D}(Y) = \frac{(1+3)^2}{12} = \frac{4}{3}.$

---

[139] *Nezavisne slučajne promenljive X i Y date su gustinama*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}, \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}.$$

(a) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

(b) *Naći očekivanje za $Z = -2X^2-3$ i $T = \sqrt{Y}+2$.*

(c) *Naći očekivanje i disperziju za $X+Y$, XY i $(X+Y)^2$.*

Rešenje: (a) Na osnovu (2.47) je

$\mathsf{E}(X) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0$

i $\mathsf{E}(Y) = 2\int\limits_0^1 y(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$ Koristeći (2.53) dobija se

$\mathsf{E}(X^2) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

i $\mathsf{E}(Y^2) = 2\int\limits_0^1 y^2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

Disperziju izračunavamo na osnovu (2.55) tj.

$\mathsf{D}(X) = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$ i $\mathsf{D}(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$

(b) Na osnovu osobina matematičkog očekivanja (2.48), (2.49) i (2.53) dobija se

$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}\left(-2X^2-3\right) = -2\,\mathsf{E}(X^2) + \mathsf{E}(-3) = -2\cdot\frac{1}{5} - 3 = -\frac{17}{5}$

$\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}\left(\sqrt{Y}+2\right) = \mathsf{E}\left(\sqrt{Y}\right) + \mathsf{E}(2) = \frac{8}{15} + 2 = \frac{38}{15},$ jer je

$\mathsf{E}\left(\sqrt{Y}\right) = \int\limits_0^1 \sqrt{y}\cdot 2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$

(c) $\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X+Y) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

Zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y je

$\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\cdot\mathsf{E}(Y) = 0\cdot\frac{1}{3} = 0.$

$\mathsf{E}\left((X+Y)^2\right) = \mathsf{E}\left(X^2+2XY+Y^2\right) = \mathsf{E}(X^2) + 2\,\mathsf{E}(XY) + \mathsf{E}(Y^2) = \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}.$

Zbog nezavisnosti X i Y je

$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{D}(Y) = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{23}{90}.$

$\mathsf{D}(XY) = \mathsf{E}\left((XY)^2\right) - \mathsf{E}(XY)^2 = \mathsf{E}(X^2)\,\mathsf{E}(Y^2) - (\mathsf{E}(XY))^2 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{30}.$

Momenti reda tri i četiri slučajnih promenljivih X i Y su

$\mathsf{E}(X^3) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^3(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0,$

$\mathsf{E}(X^4) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^4(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{35},$

$\mathsf{E}(Y^3) = 2\int\limits_0^1 y^3(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}$

i

$\mathsf{E}(Y^4) = 2\int\limits_0^1 y^4(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{15}.$

Iz osobina (2.48), (2.49) i nezavisnosti X i Y dobijamo

$\mathsf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathsf{E}\left(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4\right) =$

$= \mathsf{E}(X^4) + 4\,\mathsf{E}(X^3)\,\mathsf{E}(Y) + 6\,\mathsf{E}(X^2)\,\mathsf{E}(Y^2) + 4\,\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y^3) + \mathsf{E}(Y^4) =$

$= \frac{3}{35} + 4\cdot 0\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot 0\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{37}{105} \approx 0.35.$

Dakle, $\mathsf{D}\left((X+Y)^2\right) = \mathsf{E}\left((X+Y)^4\right) - \left(\mathsf{E}\left((X+Y)^2\right)\right)^2 = \frac{37}{105} - \left(\frac{11}{30}\right)^2 \approx 0.218.$

Teorija ocena

Teorija ocena je deo statistike koji se bavi ocenom parametara raspodele verovatnoće obeležja osnovne populacije pomoću uzorka. Posmatra se obeležje X sa raspodelom $F(x,\theta)$, gde je θ nepoznati parametar koji figuriše u datoj raspodeli F. Pomoću realizovanih vrednosti uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ treba oceniti parametar θ ili njegovu funkciju $\tau(\theta)$.

Koriste se dve vrste ocena:

- **tačkaste ocene**, u kojima neka statistika $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ daje vrednost blisku nepoznatom parametru θ,
- **intervalne ocene**, koje koriste dve statistike $U_1 = u_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i $U_2 = u_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takve da je $U_1 \leq U_2$ i da je $\mathsf{P}(U_1 < \theta < U_2) = \beta$, gde je β unapred zadata verovatnoća koju zovemo **nivo poverenja**. Slučajni interval (U_1, U_2) zovemo $100 \cdot \beta$ procentni **interval poverenja**.

3.2.1 Tačkaste ocene

Običan momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje slučajne promenljive X^k i označava se sa $m_k = E(X^k)$. Matematičko očekivanje je momenat reda 1.
Centralni momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje od $(X - \mathsf{E}(X))^k$ i označava se sa $s_k = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}(X))^k\right)$. Disperzija je centralni momenat reda 2.
Neki od načina određivanja tačkastih ocena su:

1. **Metod momenata**

   Uzorački momenat reda k, $\overline{M_n^k}$ definišemo sa $\overline{M_n^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, a njegova realizovana vrednost je $\overline{m_n^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \dfrac{1}{n}(x_1^k + x_2^k \ldots + x_n^k)$.
   Primetimo da je uzoračka aritmetička sredina uzorački momenat prvog reda $(k = 1)$.
   Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S_n^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k$.

   Primetimo da je uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda $(k = 2)$.

   Metod momenata se sastoji u izjednačavanju uzoračkog momenta $\overline{m_n^k}$ sa odgovarajućim običnim momentom m_k. Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ najčešće ćemo koristiti jednakost momenata prvog reda i uzoračkog momenta prvog reda, to jest $\mathsf{E}(X) = \overline{X}_n$. Ako imamo više nepoznatih parametara $\theta_1, \theta_2, \ldots$ u raspodeli $\mathsf{F}_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots)$ obeležja X, onda obično koristimo onoliko jednačina koliki je broj nepoznatih parametara: $m_1 = \overline{m_n^1}, m_2 = \overline{m_n^2}, \ldots$

   Rešavanjem sistema jednačina dobijamo vrednosti nepoznatih parametara. Sistem jednačina je često jednostavan za rešavanje te je metod momenata rasprostranjen u praksi.

Parametar θ će biti "dobro" ocenjen pomoću realizovane vrednosti statistike $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ako je $\mathsf{E}\left(u(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \theta$. Ovu osobinu zovemo centriranost ocene, to jest, ocena $\theta = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je **centrirana** ako je $\mathsf{E}\left(u(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \theta$.
Centriranu ocenu matematičkog očekivanja računamo rešavanjem jednačine $\overline{m_n^1} = \bar{x}_n$.
Korigovana uzoračka disperzija uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je $\hat{S}_n^2 = \dfrac{n}{n-1}\bar{S}_n^2$, tako da centriranu ocenu disperzije računamo iz jednačine $\bar{\sigma}^2 = \hat{s}_n^2 = \dfrac{n}{n-1}\bar{s}_n^2$.

2. **Metod maksimalne verodostojnosti** je jedan od najčešće korišćenih metoda za dobijanje tačkastih ocena kod realizovanih uzoraka.
   Neka je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uzorak obima n iz raspodele $F(x,\theta)$ obeležja X.
   Funkcija verodostojnosti je $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta)$, to jest

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \begin{cases} \mathsf{p}(x_1,\theta)\mathsf{p}(x_2,\theta)\ldots\mathsf{p}(x_n,\theta), & \text{diskretno obeležje} \\ \varphi(x_1,\theta)\,\varphi(x_2,\theta)\ldots\varphi(x_n,\theta)\,, & \text{neprekidno obeležje.} \end{cases} \tag{3.11}$$

   Principom maksimalne verodostojnosti za ocenu nepoznatog parametra θ se uzima statistika za koju $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ pri fiksnim, odnosno konkretnim vrednostima $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dostiže svoju najveću vrednost (maksimum). Ocena parametara pomoću metoda maksimalne verodostojnosti dobija se rešavanjem jednačine

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \ .$$

   Međutim, jednostavnije je raditi sa logaritamskom funkcijom verodostojnosti

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{3.12}$$

   koja, zbog monotonosti logaritamske funkcije, dostiže ekstremne vrednosti za iste vrednosti parametra θ za koje to postiže i funkcija L.
   Ako u raspodeli obeležja X figuriše više nepoznatih parametara $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ postupak je analogan. Traži se maksimum funkcije $L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ i tada se jednačina verodostojnosti svodi na rešavanje sistema jednačina

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \ \text{ za } \ i = 1, \ldots, k.$$

[151] *Merenje prečnika sfere izraženo je u [cm]. Dobijen uzorak od pet merenja je*

$$6.33,\ 6.37,\ 6.36,\ 6.32,\ 6.37 \quad .$$

Odrediti centrirane ocene matematičkog očekivanja i disperzije obeležja.

Rešenje: $\bar{m} = \bar{x}_5 = \frac{1}{5}(6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37) = 6.35$,

$\bar{\sigma^2} = \hat{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \bar{x}_5^2\Big) = \frac{5}{4}\Big(\frac{1}{5}(6.33^2 + 6.37^2 + 6.36^2 + 6.32^2 + 6.37^2) - 6.35^2\Big) = 0.00055$.

---

[152] *Anketiranjem 100 vozača automobila iz Novog Sada dobijene su prosečne dnevne potrošnje benzina (u litrima).*

potrošnja	2	4	5	6	8	10	11	12	13	14
broj vozača	5	10	10	12	18	12	8	10	9	6

Odrediti centrirane ocene matematičkog očekivanja i disperzije potrošnje benzina jednog vozača u Novom Sadu.

Rešenje: $\bar{x}_{100} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = \frac{1}{100}(2\cdot 5 + 4\cdot 10 + \ldots + 14\cdot 6) = 8.45$

$\bar{s}_{100}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}_{100}^2 = \frac{1}{100}(2^2\cdot 5 + 4^2\cdot 10 + \ldots + 14^2\cdot 6) - 8.45^2 = 11.7876$

Centrirana ocena matematičkog očekivanja je $\bar{m} = 8.45$.

Centrirana ocena disperzije je $\bar{\sigma^2} = \frac{100}{99}\cdot \bar{s}_n^2 = 11.9066$.

---

[153] *Obeležje X date populacije ima raspodelu* $X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 \\ \frac{\theta}{5} & \frac{\theta}{5} & 1-\frac{2\theta}{5} \end{pmatrix}$.

(a) *Metodom momenata naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka $(0, -2, 7, -2)$.*

(b) *Na osnovu istog uzorka naći ocenu nepoznatog parametra θ metodom maksimalne verodostojnosti.*

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Matematičko očekivanje obeležja je $\mathsf{E}(X) = -2\cdot\frac{\theta}{5} + 0\cdot\frac{\theta}{5} + 7(1-\frac{2\theta}{5}) = 7 - \frac{16\theta}{5}$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_4 = \bar{m}_4 = \frac{3}{4}$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{m}_4$ dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo nepoznati parametar θ: $7 - \frac{16\theta}{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{16\theta}{5} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{125}{64} = 1.953125$.

(b) Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta) = \mathsf{P}(X=0)\cdot\mathsf{P}(X=-2)\cdot\mathsf{P}(X=7)\cdot\mathsf{P}(X=-2) = \frac{\theta}{5}\cdot\frac{\theta}{5}\cdot(1-\frac{2\theta}{5})\cdot\frac{\theta}{5} = (\frac{\theta}{5})^3\cdot(1-\frac{2\theta}{5})$.
Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo
$\ln L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta) = 3\cdot\ln\frac{\theta}{5} + \ln(1-\frac{2\theta}{5})$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta)}{\partial\theta} = 3\cdot\frac{1}{\frac{\theta}{5}}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{(1-\frac{2\theta}{5})}\cdot\Big(-\frac{2}{5}\Big) = \frac{3}{\theta} - \frac{2}{5-2\theta} = \frac{15-8\theta}{\theta(5-2\theta)} \quad .$$

Dalje, iz jednačine $\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_4; \theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $15 - 8\theta = 0$ odnosno $\tilde{\theta} = \frac{15}{8} = 1.875$.

[154] *Obeležje X date populacije ima raspodelu* $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\theta & \frac{\theta}{3} \end{pmatrix}$.

Na osnovu uzorka $(1, 1, 0, 0, 0, -1, -1, 2, 2, 2, 2, -1, 0)$ naći ocenu nepoznatog parametra θ. *(a) Metodom momenata.* *(b) Metodom maksimalne verodostojnosti.*

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Matematičko očekivanje obeležja je $\mathsf{E}(X) = -1\cdot\frac{\theta}{3} - 0\cdot\frac{\theta}{3} + 1\cdot(1-\theta) + 2\cdot\frac{\theta}{3} = 1 - \frac{2\theta}{3}$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_{13} = \bar{m}_{13} = \frac{7}{13}$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{m}_{13}$ dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo nepoznati parametar θ: $1 - \frac{2\theta}{3} = \frac{7}{13} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{9}{13} = 0.692$.

(b) Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta) = \mathsf{P}(X=-1)^3\cdot\mathsf{P}(X=0)^4\cdot\mathsf{P}(X=1)^2\cdot\mathsf{P}(X=2)^4 = \big(\frac{\theta}{3}\big)^3\cdot\big(\frac{\theta}{3}\big)^4\cdot(1-\theta)^2\cdot\big(\frac{\theta}{3}\big)^4 = \big(\frac{\theta}{3}\big)^{11}(1-\theta)^2$.
Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo
$\ln L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta) = 11\cdot\ln\frac{\theta}{3} + 2\ln(1-\theta)$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta)}{\partial\theta} = 11\cdot\frac{1}{\frac{\theta}{3}}\cdot\frac{1}{3} + 2\frac{1}{1-\theta}(-1) = \frac{11}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} = \frac{11-13\theta}{\theta(1-\theta)} \quad .$$

Dalje, iz jednačine $\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $\frac{11-13\theta}{\theta(1-\theta)} = 0$ odnosno $11 - 13\theta = 0 \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{11}{13} = 0.84615$.

---

[155] *Obeležje X date populacije ima raspodelu* $X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{\theta}{4} & \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{4} & 1-\frac{5\theta}{6} \end{pmatrix}$.

Na osnovu uzorka $(-2, -2, -1, 2, -2, 1, -2, -2, -2, -2)$ naći ocenu nepoznatog parametra θ. *(a) Metodom momenata.* *(b) Metodom maksimalne verodostojnosti.*

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Matematičko očekivanje obeležja je $\mathsf{E}(X) = -2\frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{4} + 2(1 - 5\frac{\theta}{6}) = 2 - \frac{9\theta}{4}$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_{10} = \bar{m}_{10} = -\frac{12}{10} = -1.2$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{m}_{10}$ dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo nepoznati parametar θ: $2 - \frac{9\theta}{4} = -1.2 \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{12.8}{9} = 1.422$.

(b) Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta) = \mathsf{P}(X=-2)^7\cdot\mathsf{P}(X=-1)\cdot\mathsf{P}(X=1)\cdot\mathsf{P}(X=2) = \big(\frac{\theta}{4}\big)^7\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\frac{\theta}{4}\cdot(1-\frac{5\theta}{6}) = \big(\frac{\theta}{4}\big)^8\cdot\frac{\theta}{3}\cdot(1-\frac{5\theta}{6})$.

Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo
$\ln L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta) = 8\cdot\ln\frac{\theta}{4} + \ln\frac{\theta}{3} + \ln(1-\frac{5\theta}{6})$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta)}{\partial\theta} = 8\cdot\frac{1}{\frac{\theta}{4}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{\theta}{3}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{(1-\frac{5\theta}{6})}\cdot\Big(-\frac{5}{6}\Big) = \frac{9}{\theta} - \frac{5}{6-5\theta} = \frac{54-50\theta}{\theta(6-5\theta)} \quad .$$

Dalje, iz jednačine $\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $\frac{54-50\theta}{\theta(6-5\theta)} = 0$ odnosno $\tilde{\theta} = \frac{54}{50} = 1.08$.

[156] *Broj poziva u minuti na informacijama autobuske stanice ima Poissonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$. Na slučajan način je izabrano 10 minuta u toku dana i zabeležen broj poziva $(2,3,3,2,0,3,2,1,3,1)$. Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra λ.*

Rešenje:

Obeležje X ima Poissonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$, gde je $\mathsf{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots$
Metod momenata:
Poznato je da je matematičko očekivanje $\mathsf{E}(X)=\lambda$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_{10}=\frac{20}{10}=2$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{x}_n$ sledi da je nepoznati parametar $\bar{\lambda}=2$.

Metod maksimalne verodostojnosti:
$L(x_1,\dots,x_{10};\lambda)=\mathsf{P}(X=0)\cdot\mathsf{P}(X=1)^2\cdot\mathsf{P}(X=2)^3\cdot\mathsf{P}(X=3)^4=$
$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}\cdot(\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda})^2\cdot(\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda})^3\cdot(\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda})^4=\frac{\lambda^{20}}{2!3!}e^{-10\lambda}$
$\ln L(x_1,\dots,x_{10};\lambda)=20\ln\lambda-\ln 12-10\lambda$, a parcijalni izvod od $\ln L$ po λ je
$\dfrac{\partial\ln L(x_1,\dots,x_{10},\lambda)}{\partial\lambda}=\dfrac{20}{\lambda}-10$.
Dalje, iz jednačine $\dfrac{\partial\ln L(x_1,\dots,x_{10};\lambda)}{\partial\lambda}=0$ sledi da je $\frac{20}{\lambda}-10=0\Rightarrow\tilde{\lambda}=2$.

---

[157] *Reakcija oka na jednu vrstu nadražaja ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$. Eksperiment je izvršen deset puta i dobijeni su rezultati (izraženi u nano sekundama):*

$$1.41,\ 1.28,\ 2.49,\ 0.95,\ 0.26,\ 3.83,\ 1.56,\ 3.87,\ 0.83,\ 3.37$$

Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra a.

Rešenje:

Data je eksponencijalna raspodela $\mathcal{E}(a)$, njena funkcija gustine je

$$\varphi_X(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

Metod momenata:
Poznato je da je matematičko očekivanje kod eksponencijalne raspodele $\mathsf{E}(X)=\dfrac{1}{a}$.
Ocenjujemo $\mathsf{E}(X)$ vrednošću $\bar{X}_n$. Dobijamo da je $\dfrac{1}{a}=\bar{x}_n\Rightarrow\dfrac{1}{a}=\dfrac{19.85}{10}=1.985$.
Dakle, $\bar{a}=\frac{1}{1.985}\approx 0.504$.
Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1,\dots,x_{10};a)=\varphi(1.41)\cdot\varphi(1.28)\cdot\varphi(2.49)\cdot\ldots\cdot\varphi(3.37)=$
$a^{10}e^{-a(1.41+1.28+2.49+\ldots+3.37)}=a^{10}e^{-19.85a}$, dok je
$\ln L(x_1,\dots,x_{10};a)=10\ln a-19.85a$, a kako je $\dfrac{\partial\ln L(x_1,\dots,x_{10};a)}{\partial a}=10\dfrac{1}{a}-19.85$,
iz jednačine $\dfrac{\partial\ln L(x_1,\dots,x_{10};a)}{\partial a}=0$ sledi da je $\dfrac{1}{a}=1.985\Rightarrow\tilde{a}=0.504$.

---

[158] *Neka obeležje X ima gustinu*

$$\varphi_X(\theta,x)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases},\theta>-1$$

Na slučajan način izabran je uzorak

$$0.92\ \ 0.79\ \ 0.9\ \ 0.65\ \ 0.86\ \ 0.47\ \ 0.73\ \ 0.97\ \ 0.94\ \ 0.77$$

Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ.

Rešenje:

Metod momenata:
Za datu neprekidnu slučajnu promenljivu
$\mathsf{E}(X)=\int\limits_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx=(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\Big|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$.
Kako je $\bar{x}_n=\frac{8}{10}=0.8$, izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{x}_{10}$ dobijamo jednačinu $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=0.8$, odakle je $\bar{\theta}=3$.
Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1,\dots,x_{10};\theta)=\varphi(0.92)\cdot\varphi(0.79)\cdot\varphi(0.9)\cdot\varphi(0.65)\cdot\varphi(0.86)\cdot\varphi(0.47)\cdot\varphi(0.73)\cdot\varphi(0.97)\cdot\varphi(0.94)\cdot\varphi(0.77)=(\theta+1)^{10}(0.92\cdot0.79\cdot0.9\cdot0.65\cdot0.86\cdot0.47\cdot0.73\cdot0.97\cdot0.94\cdot0.77)^\theta=(\theta+1)^{10}(0.0880806)^\theta$, logaritmovanjem funkcije verodostojnosti L dobijamo
$\ln L(x_1,\dots,x_{10};\theta)=10\ln(\theta+1)+\theta\ln 0.0880806$ i kako je
$\dfrac{\partial\ln L(x_1,\dots,x_{10};\theta)}{\partial\theta}=10\dfrac{1}{\theta+1}+\ln 0.0880806$.
Iz jednačine $\dfrac{\partial\ln L(x_1,\dots,x_{10};\theta)}{\partial\theta}=0$ sledi da je $10\dfrac{1}{\theta+1}-2.4295029=0$, odnosno $\tilde{\theta}=3.116$.

---

[159] *Obeležje X ima gustinu raspodele:*

$$\varphi_X(\theta,x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases},\qquad \theta>0$$

(a) *Na slučajan način izabran je uzorak*

$$1.2\ \ 2.3\ \ 1.3\ \ 1.4\ \ 1.6\ \ 1.2\ \ 2.1$$

Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ.

(b) *Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ (za uzorak obima n)*

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Za datu neprekidnu slučajnu promenljivu
$\mathsf{E}(X)=\int\limits_0^\infty x\frac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx=\frac{1}{\sqrt{\theta}}\int\limits_0^\infty xe^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx$ ovaj integral rešićemo parcijalnom integracijom, gde je $u=x$ a $dv=e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx$, odakle je $du=dx$ i $v=-\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}$.

Dalje je $\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\Big(\big(-x\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}\big)\Big|_0^{\infty} + \sqrt{\theta}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx\Big) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\big(\sqrt{\theta}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx\big) =$
$\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx = -\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\theta}$, jer je $\big(-x\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}\big)\Big|_0^{\infty}=0$.
Kako je $\bar{x}_7 = \frac{11.1}{7} = 1.5857$, izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{x}_7$ dobijamo jednačinu $\sqrt{\theta} = 1.5857 \Rightarrow \bar{\theta} = 2.5145$.
Metod maksimalne verodostojnosti:
$L(x_1,\dots,x_7;\theta) = \varphi(1.2)\cdot\varphi(2.3)\cdot\varphi(1.3)\cdot\varphi(1.4)\cdot\varphi(1.6)\cdot\varphi(1.2)\cdot\varphi(2.1) = \frac{1}{(\sqrt{\theta})^7}e^{-\frac{1.2+2.3+1.3+1.4+1.6+1.2+2.1}{\sqrt{\theta}}} = \frac{1}{\theta^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{11.1}{\sqrt{\theta}}}$. Kako je
$\ln L(x_1,\dots,x_7;\theta) = -\frac{7}{2}\ln\theta - \frac{11.1}{\sqrt{\theta}}$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je
$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_5;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{11.1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}} = \frac{-7\sqrt{\theta}+11.1}{2\theta\sqrt{\theta}} = 0.$
Iz jednačine $\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_7;\theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $-7\sqrt{\theta}+11.1 = 0$ to jest $\tilde{\theta} = 2.5145$.

(b) Funkcija verodostojnosti za uzorak obima n je

$$L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}} = \theta^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},$$

$$\ln L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \ln\theta^{-\frac{n}{2}} + \ln e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i} = -\frac{n}{2}\ln\theta - \frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Tražimo maksimum funkcije $\ln L$ po θ:

$$\frac{\partial \ln(x_1,\dots,x_n;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{n}x_i = 0 \Rightarrow \frac{-n\theta^{\frac{1}{2}} + \sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{2\theta\sqrt{\theta}} = 0 \Rightarrow$$

$$-n\theta^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}x_i = 0 \Rightarrow \sqrt{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow \sqrt{\theta} = \overline{x}_n \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{x}_n^2.$$

---

[160] *Neka obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu*

$$\varphi_{X(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Na slučajan način izabran je uzorak od 100 studenata. Bodovi koje su studenti osvojili na ispitu prikazani su u tabeli.

osvojeni bodovi I_i	$[0,20)$	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100]$
broj studenata (frekvencija) f_i	5	17	42	27	9

Metodom momenata naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.

Rešenje:

osvojeni bodovi I_i	$[0,20)$	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100]$
broj studenata (frekvencija) f_i	5	17	42	27	9
sredine intervala x_i	10	30	50	70	90

Kako je $\bar{x}_{100} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{5}x_if_i = \frac{1}{100}(10\cdot5+30\cdot17+50\cdot42+70\cdot27+90\cdot9) = 53.6$ i
$\bar{s}^2_{100} = \frac{1}{100}(10^2\cdot5+30^2\cdot17+50^2\cdot42+70^2\cdot27+90^2\cdot9)-53.6^2 = 3260-2872.96 = 387.04$,
i kako kod normalne $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodele znamo da je $\mathsf{E}(X) = m$, a $\mathsf{D}(X) = \sigma^2$, metodom momenata ocenjujemo nepoznate parametre rešavanjem jednačina $m = \bar{x}_{100}$ i $\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2_{100}$, odakle dobijamo da je $m = 53.6$, a $\sigma^2 = \frac{100}{99}\cdot 387.04 = 390.9494$.

---

[161] *Neka obeležje X ima normalnu (Gausovu) $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu*

$$\varphi_{X(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Na slučajan način izabran je uzorak

0 2 1 2 0 1

Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.

Rešenje: Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma) = \varphi(0)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(0)\cdot\varphi(1) =$
$\frac{1}{\sigma^6(\sqrt{2\pi})^6}e^{-\frac{0^2+2^2+1^2+2^2+0^2+1^2-2(0+2+1+2+0+1)m+6m^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^6(2\pi)^3}e^{-\frac{10-12m+6m^2}{2\sigma^2}}$.
$\ln L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma) = -\ln\sigma^6 2^3\pi^3 - \frac{10-12m+6m^2}{2\sigma^2} = -6\ln\sigma - 3\ln 2\pi - \frac{10-12m+6m^2}{2\sigma^2}$.
S obzirom da imamo dva nepoznata parametra, radimo prvo izvod po nepoznatom parametru m, a zatim po nepoznatom parametru σ.
$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma)}{\partial m} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-12+12m) = 0 \Rightarrow -12+12m = 0.$
$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma)}{\partial\sigma} = -6\frac{1}{\sigma} - \frac{(10-12m+6m^2)}{2}(-2\sigma^{-3}) = \frac{-6\sigma^2+10-12m+6m^2}{\sigma^3} \Rightarrow$
$-6\sigma^2+10-12m+6m^2 = 0.$
Rešavanjem sistema jednačina $-12+12m = 0$ i $-6\sigma^2+10-12m+6m^2 = 0$, dobijamo da je $m = 1$ i $\sigma^2 = \frac{2}{3}$.

---

[162] *Neka je dat uzorak $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ iz normalne $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodele, gde su m i σ nepoznati parametri.*

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.

Interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje m obeležja sa normalnom $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelom

- Ako je standardna devijacija σ obeležja poznata

$$\mathbf{I} = \left(\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

gde je $\bar{X}_n$ aritmetička sredina uzorka, n obim uzorka, β zadati nivo poverenja a vrednost a se pronalazi u tablici normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele po obrascu $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

- Ako je standardna devijacija σ nepoznata,

$$\mathbf{I} = \left(\bar{X}_n - a\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + a\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right),$$

gde je $\bar{S}_n$ uzoračka standardna devijacija. Ako je obim uzorka $n \geq 30$, možemo primeniti centralnu graničnu teoremu i tada je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$. Ukoliko je $n < 30$, tada je $a = t_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}$ iz tablice Studentove raspodele.

Interval poverenja za nepoznatu disperziju σ^2 obeležja sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m,\sigma)$

$$\textbf{dvostrani: } \mathbf{I} = \left(\frac{n\bar{S}_n^2}{a}, \frac{n\bar{S}_n^2}{b}\right), \quad \textbf{jednostrani: } \mathbf{I} = \left(0, \frac{n\bar{S}_n^2}{c}\right)$$

U prethodnim izrazima n je obim uzorka, $\bar{S}_n^2$ je uzoračka disperzija, a vrednosti a, b i c čitamo iz tablice Pirsonove χ^2 raspodele, sa $n-1$ stepenom slobode:

$$a = \chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}, \quad b = \chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}, \quad c = \chi^2_{n-1,\beta}.$$

Jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju ima za donju granicu broj 0, zato što disperzija ne može imati negativnu vrednost. Koristi se kod testiranja parametarskih hipoteza.

Interval poverenja za nepoznatu proporciju p obeležja sa binomnom $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelom

Proporcija p predstavlja verovatnoću uspešne realizacije obeležja sa binomnom raspodelom i ocenjuje se intervalom

$$\mathbf{I} = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}, p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right).$$

U prethodnom izrazu $p = \frac{K}{n}$, gde je K broj uspešnih realizacija u uzorku obima n, $q = 1-p$, a $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

Pomoću ovog intervala možemo oceniti i **nepoznat broj pozitivnih realizacija** obeležja sa binomnom $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelom **u populaciji obima** N tako što ćemo obe granice intervala za proporciju pomnožiti obimom populacije N tj.

$$\mathbf{I} = \left(N(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}), N(p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}})\right).$$

---

[163] *Dati su podaci o visini u centimetrima 36 slučajno odabranih sportista jednog kluba. Naći 90% interval poverenja za srednju vrednost visine sportista ako je poznata standardna devijacija $\sigma = 10cm$.*

183.7,	*185.9,*	*178.0,*	*185.5,*	*185.1,*	*184.4,*	*184.3,*	*183.3,*	*184.4,*
165.2,	*178.9,*	*173.9,*	*173.7,*	*194.3,*	*186.3,*	*183.8,*	*173.4,*	*176.2,*
176.5,	*180.4,*	*177.1,*	*174.3,*	*187.6,*	*198.8,*	*188.1,*	*180.1,*	*187.1,*
164.9,	*172.6,*	*185.5,*	*167.9,*	*165.1,*	*199.2,*	*168.4,*	*169.1,*	*175.3*

Rešenje: Pretpostavljamo da obeležje koje posmatramo, visina sportiste, ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ (vidi napomenu). Srednja vrednost nekog obeležja je upravo matematičko očekivanje, pa zadatak rešavamo nalazeći interval poverenja za nepoznato očekivanje m sa poznatom devijacijom σ: $\mathbf{I} = \left(\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
Obim datog uzorka je $n = 36$, aritmetička sredina iznosi $\bar{x}_n = \frac{1}{36}(183.7 + 185.9 + \cdots + 175.3) = 179.9528$, a kako je zadati nivo poverenja $\beta = 0.90$, iz tablice Gausove raspodele čitamo da je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.90}{2}\right) = \phi^{-1}(0.95) = 1.645$.
Uvrštavanjem izračunatih vrednosti u formulu dobijamo da je

$$I = \left(179.9528 - 1.645\cdot\frac{10}{\sqrt{36}}, 179.9528 + 1.645\cdot\frac{10}{\sqrt{36}}\right).$$

Interval poverenja za srednju vrednost visine sportista posmatranog kluba, sa nivoom poverenja od 90%, je

$$(177.211cm, 182.694cm).$$

Napomena. Pretpostavka da posmatrano obeležje ima normalnu raspodelu ne važi uvek u praksi. Ali, centralna granična teorema nam garantuje da će za dovoljno veliko n rezultati dobijeni pomoću gornjih formula približno važiti za srednju vrednost posmatranog obeležja ako to obeležje ima raspodelu koja zadovoljava uslove centralne granične teoreme.
Napomena. U literaturi i kompjuterskim programima se često uvodi veličina $se(\bar{x}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ koju nazivamo **standardna greška**, (engl. *standard error*). Takođe se u literaturi sa $z = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ obeležava takozvana z-**vrednost** (engl. *z-value*). Sa tim oznakama formulu za interval poverenja pišemo $(\bar{x}_n - z\cdot se(\bar{x}_n), \bar{x}_n + z\cdot se(\bar{x}_n))$.

[164] *Aparat za merenje krvnog pritiska u mmHg je testiran na slučajno odabranim zdravim regrutima na regrutaciji. Izmerene vrednosti su: 118, 100, 119, 122, 113, 115, 113, 131, 119, 118, 116, 136, 128, 114, 123, 125, 136, 119, 115, 124, 125, 120, 121, 128, 124, 102. Naći 99% interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta.*

Rešenje: U ovom zadatku standardna devijacija obeležja nije poznata, pa koristimo interval poverenja za nepoznato očekivanje m sa nepoznatom devijacijom σ : $\mathbf{I} = (\bar{X}_n - a \cdot \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + a \cdot \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}})$.
Uzorak sadrži $n = 26$ elemenata, $\bar{x}_n = (118 + 100 + \cdots + 102)/26 = 120.154$, $\bar{s}_n = \sqrt{(118^2 + 100^2 + \cdots + 102^2)/26 - 120.154^2} = 8.3006$. Pošto je obim uzorka manji od 30, vrednost a nalazimo iz tablice Studentove raspodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.99$, $a = t_{26-1, \frac{1+0.99}{2}} = t_{25,0.995} = 2.787$.

Traženi interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta je

$$I = (120.154 - \frac{2.787 \times 8.30057}{\sqrt{25}}, 120.154 + \frac{2.787 \times 8.30057}{\sqrt{25}}) = (115.527, 124.781).$$

---

[165] *U tabeli*

ocena	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
broj đaka	*5*	*9*	*4*	*5*	*5*

su prikazane ocene na pismenom ispitu u slučajno odabranom odeljenju petog razreda. Poznato je da se ocene ponašaju u skladu sa Normalnom raspodelom. Proceniti 95%-im intervalom poverenja srednju ocenu na pismenom u petim razredima, ako

(a) je poznato da standardno odstupanje ocena na pismenom iznosi $\sigma = 1.4$.

(b) standardno odstupanje ocena na pismenom nije poznato.

Rešenje: Deo zadatka pod (a) rešavamo pomoću intervala poverenja za nepoznato m sa poznatim σ. Podaci su dati u vidu grupisanog uzorka, tako da je obim uzorka $n = 5 + 9 + 4 + 5 + 5 = 28$ i $\bar{x}_n = \frac{1}{28}(1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5) = 2.8571$.
Za $\beta = 0.95$, $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$.
Interval poverenja za srednju ocenu je

$$(2.8571 - 1.96\frac{1.4}{\sqrt{28}}, 2.8571 + 1.96\frac{1.4}{\sqrt{28}}) = (2.3385, 3.3757).$$

Kako u zadatku pod (b) standardna devijacija (odstupanje) nije poznata, koristimo interval poverenja za nepoznato m sa nepoznatim σ. Nepoznatu standardnu devijaciju ocenjujemo uzoračkom standardnom devijacijom

$$\bar{s}_n = \sqrt{\frac{1}{28}(1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 5) - 2.8571^2} = \sqrt{1.9084} = 1.4073.$$

Obim uzorka je manji od 30, tako da je $a = t_{28-1, \frac{1+0.95}{2}} = t_{27,0.975} = 2.052$.
Interval poverenja za srednju ocenu u ovom slučaju je

$$(2.8571 - 2.052\frac{1.4073}{\sqrt{27}}, 2.8571 + 2.052\frac{1.4073}{\sqrt{27}}) = (2.3014, 3.4128).$$

Napomena. U većini slučajeva, pa tako i ovde, možemo uočiti da poznavanje standardne devijacije obeležja smanjuje interval poverenja, odnosno povećava preciznost ocene nepoznatog očekivanja. Međutim, ovaj podatak u praksi najčešće nije poznat.

---

[166] *Kontrola kvaliteta u fabrici za proizvodnju deterdženta je izmerila masu pojedinačnih pakovanja iz slučajno odabranog uzorka. Rezultati su dati u tabeli.*

masa [g]	*[4800, 4900)*	*[4900, 4950)*	*[4950, 5000)*	*[5000, 5050)*	*[5050, 5100)*	*[5100, 5200]*
f_i	*8*	*31*	*96*	*109*	*48*	*8*

(a) Naći 95% interval poverenja za prosečnu masu deterdženta u jednom pakovanju.

(b) Naći 99% interval poverenja za prosečnu masu deterdženta u jednom pakovanju.

Rešenje: Standardna devijacija posmatranog obeležja (masa deterdženta) nije poznata, i zato koristimo formulu za interval poverenja za matematičko očekivanje sa nepoznatim σ. Uzorak je intervalni, pa potrebne vrednosti računamo na sledeći način: $n = \sum f_i = 8 + 31 + ... + 8 = 300$,

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum(x_i f_i) = \frac{1}{300}(48508 \cdot 8 + 4925 \cdot 31 + ... + 5150 \cdot 8) = 5005.33,$$

$$\bar{s}_n = \sqrt{\frac{1}{300}(4850^2 \cdot 8 + 4925^2 \cdot 31 + ... + 5150^2 \cdot 8) - 5005.33^2} = 55.7965.$$

Obim uzorka je veći od 30, pa za određivanje vrednosti koristimo tablicu Gausove raspodele. U delu zadatka pod (a) je $a_1 = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$, dok je u delu pod (b) $a_2 = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right) = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$.
Uvrštavanjem izračunatih vrednosti dobijamo intervale poverenja za očekivanu masu deterdženta:

$$(a)\ I_{95\%} = (5005.33 - 1.96\frac{55.7965}{\sqrt{299}}, 5005.33 + 1.96\frac{55.7965}{\sqrt{299}}) = (4999.01, 5011.65),$$

$$(b)\ I_{99\%} = (5005.33 - 2.576\frac{55.7965}{\sqrt{299}}, 5005.33 + 2.576\frac{55.7965}{\sqrt{299}}) = (4997.02, 5013.64).$$

Napomena. Uočavamo da se povećanjem nivoa poverenja povećava i odgovarajući interval poverenja. Ovo oslikava zakonitost koja važi kod svih statističkih ispitivanja - veća pouzdanost vodi do manje preciznosti i obrnuto. Zbog ove zakonitosti ne možemo birati prevelike nivoe poverenja (npr. 0.999 i slično) jer bi odgovarajući intervali poverenja bili previše široki i stoga praktično neupotrebljivi.

[167] *Od 1000 novorođenčadi u jednom porodilištu 517 su bili dečaci. Naći 90% interval poverenja za procenat dečaka.*

Rešenje: Nepoznati procenat dečaka ćemo oceniti pomoću intervala poverenja za nepoznatu proporciju p: $\mathbf{I} = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}, p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right)$.
Posmatrani uzorak je obima $n = 1000$ i u njemu je bilo $k = 517$ uspešnih realizacija, tako da je realizovana proporcija $\bar{p} = \frac{517}{1000} = 0.517$ i $\bar{q} = 1 - 0.517 = 0.483$. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.9$, tablična vrednost $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.9}{2}\right) = \phi^{-1}(0.95) = 1.645$.
Traženi interval poverenja je

$$\left(0.517 - 1.645\sqrt{\frac{0.517 \cdot 0.483}{999}}, 0.517 + 1.645\sqrt{\frac{0.517 \cdot 0.483}{999}}\right) = (0.491, 0.543),$$

odnosno sa nivoom poverenja 90% možemo tvrditi da će biti između 49.1% i 54.3% dečaka.

---

[168] *Kontrola kvaliteta iz zadatka* [166] *treba da utvrdi 95% interval poverenja za proporciju pakovanja čija je masa van dozvoljenog odstupanja tj. ispod* 4900 *g ili preko* 5100 *g. Ako se godišnje proizvede 350000 pakovanja deterdženta, odrediti 95% interval poverenja za broj pakovanja koja su nepropisne mase.*

Rešenje: Iz tablice date u zadatku [166] vidimo da je broj pakovanja iz kontrolnog uzorka koji imaju manje od 4900 g jednak 8, isto kao i broj onih koji imaju više od 5100 g. Stoga je broj uspešnih realizacija $k = 8 + 8 = 16$ (pod uspehom uvek podrazumevamo ono što je od interesa u zadatku, u ovom konkretnom slučaju uspeh je kada je pakovanje nepropisne mase). Obim uzorka $n = 300$, pa je $\bar{p} = \frac{16}{300} = 0.053$ i $\bar{q} = 1 - 0.053 = 0.947$. Tablična vrednost $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = 1.96$.
Uvrštavanjem dobijenih rezultata u obrazac za interval poverenja za nepoznatu proporciju, dobijamo

$$\left(0.053 - 1.96\sqrt{\frac{0.053 \cdot 0.947}{299}}, 0.053 + 1.96\sqrt{\frac{0.053 \cdot 0.947}{299}}\right) = (0.0276, 0.0783).$$

Kako je obim cele populacije jednak godišnjoj proizvodnji $N = 350000$, dobijamo da je 95% interval poverenja za broj pakovanja koja su nepropisne mase

$$(350000 \cdot 0.0276, 350000 \cdot 0.0783) = (9660, 27405).$$

---

[169] *Na jednoj kontrolnoj tački puta izmerena je brzina slučajno odabranih automobila i rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:*

brzina [km/h]	*[60, 80]*	*(80, 90]*	*(90, 100]*	*(100, 110]*	*(110, 120]*	*(120, 140]*
f_i	5	20	36	23	15	1

(a) *Naći 95% interval poverenja za prosečnu brzinu automobila na toj kontrolnoj tački.*
(b) *Naći 99% interval poverenja za prosečnu brzinu automobila na toj kontrolnoj tački, ako je poznata standardna devijacija $\sigma = 11.2$.*
(c) *Ako je najveća dozvoljena brzina na tom delu puta 90 km/h, odrediti 90% interval poverenja za procenat automobila koji se kreću nedozvoljenom brzinom.*

(d) *Ako u toku jednog dana tim putem prođe 1200 automobila, i ako je kazna za prekoračenje brzine 1500 RSD, odrediti 90% interval poverenja za iznos novca koji bi sakupila saobraćajna policija ako bi naplatila kaznu svima koji su tog dana i na tom mestu prekoračili brzinu.*

Rešenje:

(a) Vrednosti potrebnih statistika su $n = 100$, $\bar{x}_n = 97.4$, $\bar{s}_n = 11.863$, tablična vrednost je $a = 1.96$, pa je odgovarajući interval poverenja

$$I = (95.063 km/h,\ 99.737 km/h).$$

(b) Vrednosti potrebnih statistika su $n = 100$, $\bar{x}_n = 97.4$, $\sigma = 11.2$, tablična vrednost je $a = 2.576$, pa je odgovarajući interval poverenja

$$I = (94.515 km/h,\ 100.285 km/h).$$

(c) Obim uzorka je $n = 100$, uzoračka proporcija je $\bar{p} = 0.75$, $\bar{q} = 0.25$, a tablična vrednost $a = 1.645$. Sledi da je

$$I = (67.8\%,\ 82.2\%).$$

(d) Interval poverenja dobijamo množenjem granica prethodnog intervala $I = (1200 \cdot 1500 \cdot 0.678, 1200 \cdot 1500 \cdot 0.822) = (1220400\ RSD,\ 1479600\ RSD)$.

---

[170] *Iz obeležja sa normalnom raspodelom uzet je uzorak obima $n = 27$. Izračunata je uzoračka disperzija $\bar{s}^2_{27} = 9.7344$. Naći dvostrani i jednostrani interval poverenja za disperziju sa nivoom poverenja $\beta = 0.95$.*

Rešenje: Intervale poverenja za nepoznatu disperziju obeležja sa normalnom raspodelom nalazimo pomoću sledećih formula: $\mathbf{I} = \left(\frac{n\bar{S}^2_n}{a}, \frac{n\bar{S}^2_n}{b}\right)$, i $\mathbf{I} = \left(0, \frac{n\bar{S}^2_n}{c}\right)$.
Obim uzorka i uzoračka disperzija su poznati: $n = 27$ i $\bar{s}^2_{27} = 9.7344$, tako da još treba odrediti tablične vrenosti iz tablice χ^2 rapodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.95$, imamo da je
$a = \chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}} = \chi^2_{27-1,\frac{1+0.95}{2}} = \chi^2_{26,0.975} = 41.9$, $b = \chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}} = \chi^2_{27-1,\frac{1-0.95}{2}} = \chi^2_{26,0.025} = 13.8$, $c = \chi^2_{26,0.95} = 38.9$.
Dakle, dvostrani interval je

$$I = \left(\frac{27 \times 9.7344}{41.9}, \frac{27 \times 9.7344}{13.8}\right) = (6.27, 19.05),$$

a jednostrani

$$I = \left(0, \frac{n\bar{S}^2_n}{c}\right) = \left(0, \frac{27 \times 9.7344}{38.9}\right) = (0, 6.76).$$

---

[171] *Uz pretpostavku da obeležje „masa pakovanja” iz zadatka* [166] *ima normalnu raspodelu, izračunati 98-procentni dvostrani i jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju uzorka.*

Testiranje statističkih hipoteza

U ovoj lekciji ćemo objasniti šta je statistička hipoteza i pokazati kako se može koristiti uzorak podataka za njeno testiranje. Napravićemo razliku između nulte hipoteze i alternativne hipoteze. Objasnićemo značaj odbacivanja nulte hipoteze i ne odbacivanja te hipoteze. Predstavićemo koncept p vrijednosti koja se dobije kao rezultat testa.

Testiranje hipoteza i nivoi značajnosti

Statistička hipoteza je tvrdnja o prirodi populacije. Često je napisana u obliku parametara populacije.

Da bi testirali statističku hipotezu, moramo odrediti da li je hipoteza saglasna sa podacima iz uzorka.

1. Neka fabrika duhana tvrdi da je otkrila novi tretman obrade listova duhana, koji kao rezultat u prosjeku proizvodi cigarete koje sadrže manje od 1,5 miligrama nikotina po cigareti, ili tačno 1,5 miligrama nikotina. Pretpostavimo da je istraživač koji treba ovo ispitati i potvrditi, skeptičan (sumnjičav) prema ovoj tvrdnji i zaista vjeruje da će sredina (prosjek) uzorka prevazići 1,5 miligram. Da bi opovrgao ovu tvrdnju fabrike duhana, istraživač je odlučio da testira hipotezu da je sredina manja ili jednaka 1,5 miligrama. Odrediti nultu i alternativnu hipotezu ovog eksperimenta, te ih prikazati simbolično pomoću parametara.

Nulta hipoteza, koju označavamo sa H_0, je tvrdnja o parametrima populacije. *Alternativnu hipotezu* označavamo sa H_1. Nulta hipoteza će biti odbačena ako se pojavi nesaglasnost sa uzorkom podataka, a u suprotnom neće biti odbačena.

2. Posmatrajmo problem iz Zadatka broj 1. Riječima objasniti kakva bi dalja procedura bila nakon što znamo alternativnu i nultu hiptezu. Objsaniti u kojem slučaju bi nulta hipoteza bila odbačena, a u kojem slučaju nulta hipoteza ne bi bila odbačena (sve skroz ukratko, bez ikakvog računa).

Odluka da li ćemo li ne odbaciti nultu hipotezu je bazirana na vrijednosti iz test-statistike.

Test-statistika je statistika čije vrijednosti su određene iz uzorka podataka. U zavisnosti od vrijednosti ove test statistike, nulta hipoteza će biti odbačena ili ne.

3. Objsniti šta je test-statistika iz Zadatak broj 1. U kojem slučaju bi tada nulta hipoteza bila odbačena (sve skroz ukratko, bez ikakvog računa).

U opštem slučaju, ako sa TS označimo test-statistiku, da bi završili naše specifikacije za test, moramo odrediti skup vrijednosti za TS na osnovu kojih bi nultu hipotezu obacili.

Kritična oblast, također poznata kao i *oblast odbacivanja*, je skup vrijednosti iz test-statistike za koje je nulta hipoteza odačena.

4. Statistički test nulte hipoteze H_0 je podpuno određen kada su određeni test-statistika i kritični region. Ako sa TS označimo test-statistiku a sa K označimo kritični region, tada statistički test nulte hipoteze H_0 je sljedeći:

$$\text{Odbaci } H_0 \quad \text{ako je TS u K}$$
$$\text{Nemoj odbaci } H_0 \quad \text{ako TS nije u K}$$

Primjeniti ovo objašnjenje za Zadatak broj 1, pod pretpostavkom da je standardna devijacija nikotina u cigareti 0,8 miligrama, a n veličina uzorka.

Ako je veličina uzorka $n = 36$ za koju vrijednost će nulta hipoteza biti odbačena a za koju ne.

Da li će nulta hipoteza biti odbačena za vrijednost sredine uzorka 1,7? Šta za slučaj 1,9?

Odbacivanje nulte hipoteze H_0 je jaka tvrdnja da H_0 nije u saglasnosti sa posmatranim podacima. Rezultat da H_0 nije odbačen je slaba tvrdnja koja se treba tumačiti kao da je H_0 saglasan sa podacima.

Klasična procedura za testiranje nulte hipoteze je da fiksiramo dovoljno mali nivo značajnosti α i onda zahtjevamo da je vjerovatnoća odbacivanja H_0, kada je H_0 tačan, manja ili jednaka od α.

Ako nam je cilj da ustanovimo tačnost određene hipoteze, tada ta hipoteza bi trebala biti dizajnirana kao alternativna hipoteza. Slično, ako nam je cilj da hipoteza izgubi svoj ugled (da bude na zlom glasu) tada hipoteza treba da je dizajnirana kao nulta hipoteza.

5. Posmatrajmo problem iz Zadatka broj 1. Ako fabrika duhana želi da sprovede eksperiment u kome će dokazati da je sredina nivoa sadržaja nikotina u njezinim cigaretama manja od 1,5 šta će fabrika tada uzti kao nultu hipotezu a šta za alternativnu hipotezu? Zašto?

6. Posmatrajmo suđenje u kome porota mora odlučiti između hipoteze A da je osumnječeni kriv i hipoteze B da je on ili ona nevin.

(a) U okviru testiranja hipoteza i BiH zakonskog sistema, koja od hipoteza bi trebala da bude nulta hipoteza?

(b) Šta mislite šta bi bila odgovarajuća kritična oblast u ovoj situaciji?

Rješenje-upute: (a) Hipoteza B. □

7. Pretpostavimo da test

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu \neq 0$$

kao rezultat ima odbacivanje hipoteze H_0 na 5 postotnom nivou značajnosti. Koje od sljedećih tvrdnji je (su) tačna(e)?

(a) Podaci pokazuju da je μ dovoljno različito od 0, što znači da je dovoljno daleko od 0.

(b) Podaci su dovoljno jaki da zaključimo da μ nije jednako 0.

(c) Vjerovatnoća da je μ jednako 0 je manja od 0,05.

(d) Hipoteza da je μ jednako 0 je odbačeno procedurom koja je kao rezultat imala odbacivanje samo 5 postotaka vremena kada je μ jednako 0.

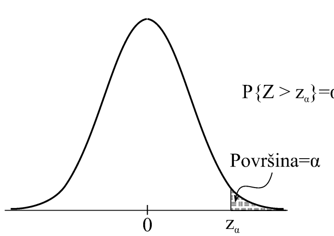
Rješenje-upute: (d) je najviše tačno; (b) je više tačno nego što nije. □

Testovi koji se odnose na sredinu populacije koja ima normalnu raspodjelu: slučaj kada je varijansa poznata (Z test)

8. Za bilo koju vrijednost α između 0 i 1, definišemo z_α kao vrijednost za koju vrijedi da je

$$P\{Z > z_\alpha\} = \alpha$$

Drugim riječima, vjerovatnoća da standardna normalna slučajna varijabla koja je veća od z_α da bude jednaka α (vidi sliku desno) (z_α nazivamo $100(1-\alpha)$ postotak standardne normalne distribucije).



Koristeći tabelu Standardne normalne vjerovatnoće izračunati $z_{0.025}$, $z_{0.05}$, $z_{0.10}$, $z_{0.005}$, $z_{0.01}$ i $z_{0.25}$.

Pretpostavimo da je $X_1, X_2, ..., X_n$ uzorak iz normalne distribucije koja ima nepoznatu sredinu μ i poznatu varijansu σ^2, i pretpostavimo da želimo testirati nultu hipotezu da je sredina μ jednaka nekoj određenoj vrijednosti nasuprot alternativnoj koja nije. To jest, želimo testirati

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

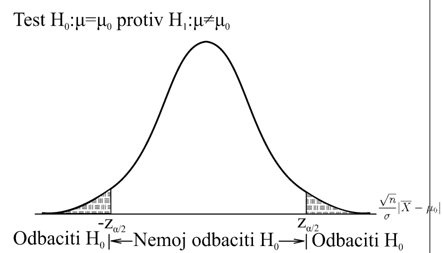
nasuprot alternativnoj hipotezi

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

za određenu vrijednost μ_0.

Ako je $\overline{X}$ sredina uzorka $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, z_α označava $100(1-\alpha)$ postotak standardne normalne distribucije i σ^2 varijansa tada nivo-α-značajnosti nulte hipoteze da je sredina populacije jednaka određenoj vrijednosti μ_0 nasuprot alternativi da nije jednaka μ_0 je da odbacimo nultu hipotezu ako

$$|\overline{X} - \mu_0| \geq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



ili ekvivalentno sa

$$\begin{array}{ll} \text{Odbaci } H_0 & \text{ako je } \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| \geq z_{\alpha/2} \\ \text{Nemoj odbaciti } H_0 & \text{u suprotnom} \end{array}$$

9. Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću *slučajnog šuma*, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10. Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

Vrijednost p je najmanja moguća vrijednost nivoa značaja na osnovu koje podaci vode ka odbacivanju nulte hipoteze. Ona daje vjerovatnoću da podaci ne podržavaju H_0.....

10. Uređaj koji astronomi koriste za mjerenje udaljenosti kao rezultat ima mjeru koja ima srednju vrijednost jednaku stvarnoj udaljenosti objekta koji je mjeren i standardnu devijaciju od 0,5 svjetlosnih godina. Trenutna teorija nam govori da stvarna udaljenost između Zemlji i asteroida Phyla iznosi 14,4 svjetlosne godine. Testirati ovu hipotezu, na 5 postoni nivo značaja, ako šest nezavisnih mjera povlači sljedeće podatke

$$15,1; \quad 14,8; \quad 14,0; \quad 15,2; \quad 14,7; \quad 14,5;$$

(odgovarajuća distribucija je normalna).

Rješenje-upute: $H_0 : \mu = 14,4$; $H_1 : \mu \neq 14,4$; $z_{0,025} = 1,96$; $\sigma = 0,5$ (iz postavke); $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = 1,5513$; Sad imamo

$$\begin{array}{ll} \text{Odbaci } H_0 & \text{ako je } 1,5513 \geq 1,96 \\ \text{Nemoj odbaciti } H_0 & \text{u suprotnom} \end{array}$$

Nemoj odbaciti H_0. □

11. Posmatrajmo eksperiment iz Zadatka broj 9 i pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

12. Da bi testirali hipotezu

$$H_0 : \mu = 1,5 \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu \neq 105$$

uzet je uzorak veličine 9. Ako je sredina uzorka $\overline{X} = 100$, pronaći p vrijednost ako je poznata standardna devijacija populacije

(*a*) $\sigma = 5$
(*b*) $\sigma = 10$
(*c*) $\sigma = 15$

U kojem slučaju će nulta hipoteza biti odbačena sa 5 postotnim nivoom značajnosti? Šta je sa slučajem za 1 postotni nivo?

Rješenje-upute: $H_0 : \mu = 105$; $H_1 : \mu \neq 105$;
(*a*) $\sigma = 5$; $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = 3$;
Sad imamo $P\{|Z| \geq 3\} = 2P\{Z \geq 3\} = 2(1 - P\{Z < 3\}) = 0,0026$
(*b*) $p = 0,1336$
(*c*) $p = 0,3174$
Na 5% nivou značajnosti odbacićemo H_0 u slučaju (*a*). Za 1% nivo značajnosti odbacićemo H_0 u slučaju (*a*). □

Sljedeći primjer je skoncentrisan na određivanje vjerovatnoće za ne odbacivanje nulte hipoteze kada je ona netačna.

13. Posmatrajmo eksperiment iz Zadatka broj 9. Ako pretpostavimo da je nivo značajnosti 0,05, kolika je vjerovatnoća da će nulta hipoteza (da je intenzitet signala jednak 10) biti odbačena kada je stvarna vrijednost signala 9,2?

14. Poznato je da vrijednost koju prima lokalna prijemna stanica jednaka vrijednosti koju šalje plus slučajna greška koja je normalna sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 2. Ako je ista vrijednost poslana 7 puta, izračunati vjerovatnoću da li će nulta hipoteza, da je vrijednost 14 poslana, biti odbačena, na 5 postotnom nivou značajnosti, kada je stvarna vrijednost koja je poslana

(*a*) 15
(*b*) 13
(*c*) 16

ako su primljene vrijednosti

$$14,6; \quad 14,8; \quad 15,1; \quad 13,2; \quad 12,4; \quad 16,8; \quad 16,3;$$

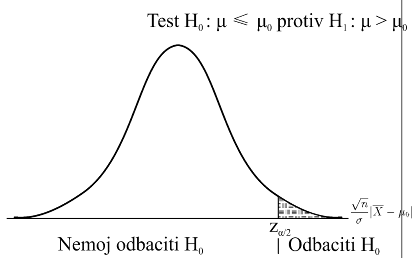
Rješenje-upute: (*a*) 0.2616 (*b*) 0.2616 (*c*) 0.7549 □

U mnogim situacijama, zanima nas testiranje hipoteza da li je sredina manja ili jednaka od neke određene vrijednosti μ_0 nasuprot alternativi da je veća od te vrijednosti. To jest, često nas zanima testiranje

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

nasuprot alternativnoj hipotezi

$$H_1 : \mu > \mu_0.$$



S obzirom da želimo odbaciti H_0 samo kada je sredina uzorka $\overline{X}$ mnogo veće od μ_0 (i ne više kada je mnogo manje), tada test α-niva-značajnosti je da

$$\begin{array}{ll} \text{Odbaci } H_0 & \text{ako je } \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) \geq z_{\alpha/2} \\ \text{Nemoj odbaciti } H_0 & \text{u suprotnom} \end{array}$$

(vidi sliku)

15. Sve sadašnje cigarete koje se prodaju sadrže u prosjeku najmanje 1,5 miligrama nikotina. Jedna fabrika duhana koja proizvodi cigarete tvrdi da je otkrila novi metod obrade listova duhana i da kao rezultat u prosjeku proizvodi cigarete koje sadrže manje od 1,5 miligrama nikotina po cigareti. Da bi testirala ovu tvrdnju, uzeto je 20 cigareta za testiranje iz ove fabrike. Ako je poznato da je standardna devijacija nikotina po cigareti 0,7 miligrama, kakve zaključke možete izvesti, na 5 postotnom nivou značajnosti, ako je prosječan sadržaj nikotina u ovih 20 cigareta 1,42 miligrama?

Testovi statističkih hipoteza koje sadrže ili nultu ili alternativnu hipotezu u obliku nejednakosti koja je veća (ili manja) od određene vrijednosti se nazivaju *jedno-strani testovi*.

Tabela 1 - Testiranje hipoteza koje se odnose na sredinu μ normalne populacije ako je poznata varijansa σ^2 ($X_1, ..., X_n$ je uzorak podataka, a $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n}$).

H_0	H_1	Test statistika TS	Test α-nivoa-značajnosti	p vrijednost ako je $TS = v$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	Odbaci H_0 ako je $\lvert TS \rvert \geq z_{\alpha/2}$ U suprotnom nemoj odbaci H_0	$2P\{Z \geq \lvert v \rvert\}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu \not> \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	Odbaci H_0 ako je $TS \geq z_{\alpha/2}$ U suprotnom nemoj odbaci H_0	$2P\{Z \geq v\}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu \not< \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	Odbaci H_0 ako je $\lvert TS \rvert \leq -z_{\alpha/2}$ U suprotnom nemoj odbaci H_0	$2P\{Z \leq v\}$

Table 6.1 Standard Normal Probabilities

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Data value in table is $P\{Z < x\}$.

Testiranje statističkih hipoteza

Sva potrebna teorija je iskucana na prethodnim stranicama.

Uvod

Pogledati iskucani tekst

Testiranje hipoteza i nivoi značajnosti

Pogledati iskucani tekst. Ključni pojmovi su Statistička hipoteza, nulta hipoteza, alternativna hipoteza, test-statistika, kritična oblast, nivo značajnosti

(#) Neka fabrika duhana tvrdi da je otkrila novi tretman obrade listova duhana, koji kao rezultat u prosjeku proizvodi cigarete koje sadrže manje od 1,5 miligrama nikotina po cigareti, ili tačno 1,5 miligrama nikotina. Pretpostavimo da je istraživač koji treba ovo ispitati i potvrditi skeptičan (sumnjičav) prema ovoj tvrdnji i on vjeruje da će sredina (prosjek) uzorka prevazići 1,5 miligram. Da bi opovrgao ovu tvrdnju fabrike duhana, istraživač je odlučio da testira hipotezu da je sredina manja ili jednaka 1,5 miligrama. Odrediti nultu i alternativnu hipotezu ovog eksperimenta, te ih prikazati simbolično pomoću parametara.

Rj: Statistička hipoteza koju trebamo testirati, se naziva nulta hipoteza i označena sa H_0, i u ovom slučaju ona je pretpostavka da je sadržaj sredine nikotina po cigareti manja ili jednaka od 1,5 miligrama. Simbolično, ako sa μ označimo sadržaj sredine nikotina po cigareti, tada nultu hipotezu možemo označiti sa

$$H_0: \mu \leq 1{,}5$$

Alternativa nultoj hipotezi, koju osoba koja vrši testiranje u stvari želi da postigne, se naziva alternativna hipoteza i označena sa H_1. Za naš primjer, H_1 je hipoteza da sadržaj sredine nikotina prevazilazi 1,5 miligrama, što se simbolično može pisati kao

$$H_1: \mu > 1{,}5$$

(#) Posmatrajmo problem iz prvog zadatka. Riječima objasniti kakva bi dalja procedura bila nakon što znamo alternativnu i nultu hipotezu. Objasniti u kojem bi slučaju nulta hipoteza bila odbačena, a u kojem slučaju nulta hipoteza ne bi bila odbačena (sve skroz ukratko, bez ikakvog računa).

Rj.

Da bi testirali nultu hipotezu da je sadržaj srednje nikotina po cigareti manji ili jednak od 1,5 miligrama, na slučajan način bi izabrali cigarete koje su obrađene novim tretmanom obrade listova duhana i izmjerili bi njihov sadržaj nikotina.

Ako rezultati uzorka podataka nisu "saglasni" sa nultom hipotezom, tada kažemo da je nulta hipoteza odbačena; a ako su "saglasni" sa nultom hipotezom tada nulta hipoteza nije odbačena.

(#) Objasniti šta je test-statistika iz prvog zadatka. U kojem slučaju bi tada nulta hipoteza bila odbačena (skroz ukratko, bez ikakvog računa).

Rj.

U primjeru za cigarete, test-statistika je prosječan sadržaj nikotina na uzorku cigareta. Statistički test bi tada odbacio nultu hipotezu kada bi ovaj statistički test bio dovoljno veći od 1,5.

(#) Statistički test nulte hipoteze H_0 je podpuno određen kada su određeni test-statistika i kritični region. Ako sa TS označimo test-statistiku a sa K označimo kritični region, tada statistički test nulte hipoteze H_0 je sljedeći

Odbaci H_0 ako je TS u K
Nemoj odbaciti H_0 ako TS nije u K

Primjeniti ovo objašnjenje za zadatak broj 1, pod pretpostavkom da je standardna devijacija nikotina u cigareti 0,8 miligrama, a n veličina uzorka.

Ako je veličina uzorka n=36 za koju vrijednost će nulta hipoteza biti odbačena a za koju ne. Da li će nulta hipoteza biti odbačena za vrijednost sredine uzorka 1,7? Šta je za slučaj 1,9.

Rj. Za nikotin primjer koji smo do sada posmatrali, ako je poznato da je standardna devijacija sadržaja nikotina po cigareti 0,8 miligrama, tada jedna mogućnost za testiranje nulte hipoteze je da iskoristimo test statistiku $\overline{X}$ koja je jednaka sredini nivoa uzorka nikotina, zajedno sa kritičnim regionom

$$C = \left\{ \overline{X} \geq 1,5 + \frac{1,312}{\sqrt{n}} \right\}$$

To jest, nulta hipoteza će biti

Odbačena ako $\overline{X} \geq 1,5 + \frac{1,312}{\sqrt{n}}$
Neće biti odbačena u suprotnom

gdje je n veličina uzorka (razmatranje koje se nalazi iza kritičnog regiona će biti upoznato u sljedećem dijelu lekcije).

Na primjer, ako za test iznad primjenimo uzorak veličine 36, tada će nulta hipoteza, da je sredina populacije manja ili jednaka 1,5, bilo odbačena ako $\overline{X} \geq 1,719$ a neće biti odbačena ako je $\overline{X} < 1,719$. Važno je da primjetimo da čak i kada je procjena μ-naime, vrijednost sredine uzorka $\overline{X}$, prevazišla vrijednost od 1,5, nulta hipoteza ne mora biti odbačena. Zaista, kada je n=36, vrijednost sredine uzorka od 1,7 neće kao rezultat imati odbacivanje nulte hipoteze. Ovo je tačno čak iako tako velika vrijednost sredine uzorka ne ide u prilog za podršku nulte hipoteze. Bezobzira, ona je saglasna sa nultom hipotezom da ako je sredina populacije 1,5, da tada postoji razumna vjerovatnoća da će prosjek uzorka veličine 36 biti velik kao 1,7. Sa druge strane, vrijednost sredine uzorka od 1,9 je malo vjerovatna, ako je sredina populacije manja ili jednaka 1,5 što će voditi ka odbacivanju ove hipoteze.

(#) Posmatrajmo problem iz prvog zadatka. Ako fabrika duhana želi da sprovede eksperiment u kome će dokazati da je sredina nivoa sadržaja nikotina u njezinim cigaretama manja od 1,5 šta će fabrika tada uzeti kao nultu hipotezu a šta za alternativnu hipotezu? Zašto?

R:

Ako fabrika duhana sprovodi eksperiment u kojem želi da pokaže da je sredina nivoa nikotina u cigaretama manja od 1,5, tada će za nultu hipotezu uzeti

$$H_0: \mu \geq 1,5$$

a za alternativnu hipotezu

$$H_1: \mu < 1,5$$

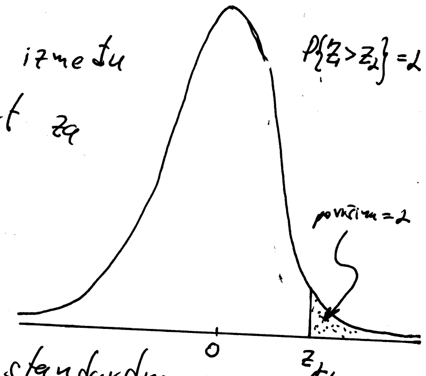
Tada ova kompanija može iskoristiti odbacivanje nulte hipoteze kao "dokaz" svoje tvrdnje da je sredina sadržaja nikotina manja od 1,5 miligrama.

Testovi koji se odnose na sredinu populacije koja ima normalnu raspodjelu: slučaj kada je varijansa poznata (Z test)

Dio teorije pogledati na iskucanom papiru.

Za bilo koju vrijednost α između 0 i 1, definišemo z_α kao vrijednost za koju vrijedi da je

$$P\{Z_1 > z_\alpha\} = \alpha .$$



Drugim riječima, vjerovatnoća da standardna normalna slučajna varijabla koja je veća od z_α da bude jednaka α (vidi sliku iznad) (z_α nazivamo $100(1-\alpha)$ postotak standardne normalne distribucije).

Koristeći tabelu Standardne normalne vjerovatnoće izračunati $z_{0,025}$, $z_{0,05}$, $z_{0,10}$, $z_{0,005}$, $z_{0,01}$ i $z_{0,25}$.

Rj.

$z_{0,025}$

$$P\{Z_1 < z_\alpha\} = 1 - P\{Z_1 > z_{0,025}\} = 0,975 \xRightarrow{\text{iz Tabele}} z_{0,025} = 1,96$$

$z_{0,05}$

$$P\{Z_1 < z_\alpha\} = 1 - P\{Z_1 > z_{0,05}\} = 0,95$$

$$\left.\begin{array}{l} P\{Z_1 < 1,64\} = 0,9495 \\ P\{Z_1 < 1,65\} = 0,9505 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{0,05} = 1,645$$

$$\frac{0,9495+0,9505}{2} = 0,95$$

$z_{0,10} \Rightarrow P(Z_1 < z_\alpha) = 0,9$

$$\left.\begin{array}{l} P\{Z_1 < 1,28\} = 0,8997 \\ P\{Z_1 < 1,29\} = 0,9015 \end{array}\right\} \xRightarrow{0,9015-0,8997=0,0018} z_{0,10} = 1,282$$

$z_{0,005} \Rightarrow P\{Z_1 < z_\alpha\} = 0,995 \Rightarrow z_\alpha = 2,576$

$z_{0,01} = 2,326$, $z_{0,25} = 0,6744$

Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću slučajnog šuma, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10. Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

Rj. Ako μ predstavlja stvarnu vrijednost emitovanog signala, tada nulta hipoteza koju želimo testirati je

$$H_0: \mu = 10$$

nasuprot alternative

$$H_1: \mu \neq 10$$

Pretpostavimo da želimo testirati ovo na nivou značajnosti 0,05.

$$z_{\alpha/2} = z_{0,025}, \quad P\{Z_1 < z_\alpha\} = 1 - P\{Z_1 > z_{0,025}\} = 0,975 \xRightarrow{\text{iz Tabele}}$$

$z_{0,025} = 1,96$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}|11,6 - 10| = 1,79$$

Kako je ova vrijednost manja od $z_{0,025} = 1,96$, nulta hipoteza nije odbačena. Drugim riječima, možemo zaključiti da podaci nisu nesaglasni sa nultom hipotezom da je vrijednost signala jednak 10. Razlog za ovo je taj da je sredina uzorka udaljena od vrijednosti 10 kao što bi se opažano moglo pojaviti, kada je H_0 tačno, nad 5 postotaka vremena. Bez obzira na ovo, primijetimo da, ako je nivo značajnosti izabrano da bude $\alpha = 0,1$, nasuprot našem $\alpha = 0,05$, tada će nulta hipoteza biti odbačena (zato što je $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$).

(#) Posmatrajmo prethodni zadatak i pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

Rj. Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti iz prethodnog zadatka 10,8. U ovom slučaju apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}|10,8 - 10| = 0,894$$

Kako je

$$P\{|Z| \geq 0,894\} = 2P\{Z \geq 0,894\} =$$

$$= 2(1 - P\{Z < 0,894\}) = 2(1 - 0,8143) = 2 \cdot 0,1857 = 0,371$$

(iz date Tabele)

slijedi da je p vrijednost $p = 0,371$. Prema tome, nulta hipoteza da je vrijednost signala 10 neće biti odbačena na bilo kojem značajnom nivou manjem od 0,371. S obzirom da nikad nećemo željeti da koristimo nivo značajnosti koji će biti veći od ove vrijednosti, H_0 neće biti odbačeno.

S druge strane, ako je vrijednost sredine uzorka 7,8 tada apsolutna vrijednost test statistike će biti

$$\frac{\sqrt{20}}{4}(2,2) = 2,46$$

pa će p vrijednost iznositi

$$p \text{ vrijednost} = P\{|Z| \geq 2,46\}$$
$$= 2P\{Z \geq 2,46\} = 2(1 - \underbrace{P\{Z < 2,46\}}_{=0,9931})$$
$$= 2 \cdot 0,0069 =$$
$$= 0,014$$

Time, H_0 će biti odbačena na svim nivoima značajnosti iznad 0,014 i neće biti odbačena za niže nivoe značajnosti.

(#) Posmatrajmo isti eksperiment kao u prethodnom zadatku (da je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde). Ako pretpostavimo da je nivo značajnosti 0,05, kolika je vjerovatnoća da će nulta hipoteza (da je intenzitet signala jednak 10) biti odbačena kada je stvarna vrijednost signala 9,2?

Rj. Iz postavke zadatka $\sigma = 4$ i $n = 20$. Prema tome test od 0,05-nivoa-značajnosti

$$H_0: \mu = 10 \quad \text{protiv} \quad H_1: \mu \neq 10$$

će odbaciti H_0 ako

$$\frac{\sqrt{20}}{4}|\overline{X} - 10| \geq Z_{0,025}$$

ili, ekvivalentno, ako

$$|\overline{X} - 10| \geq \frac{4Z_{0,025}}{\sqrt{20}}$$

Kako je $\frac{4Z_{0,025}}{\sqrt{20}} = \frac{4 \cdot 1,96}{\sqrt{20}} = 1,753$

Ovo znači da će H_0 biti odbačeno ako je udaljenost između $\overline{X}$ i 10 najmanje 1,753. To jest, H_0 će biti odbačeno ako

$$\overline{X} \geq 10 + 1,753 \quad \text{ili} \quad \overline{X} \leq 10 - 1,753.$$

To jest, ako

$$\overline{X} \geq 11,753 \quad \text{ili} \quad \overline{X} \leq 8,247$$

tada će H_0 biti odbačeno.

Sada, ako je sredina populacije 9,2, tada $\overline{X}$ će biti normalno sa sredinom 9,2 i standardnom devijacijom $\frac{4}{\sqrt{20}} = 0,894$; i sa standardizovanom varijablom

$$Z = \frac{\overline{X} - 9,2}{0,894}$$

koja će biti standardna normalna slučajna varijabla.
Time, kada je tačna vrijednost signala 9,2, vidimo da

$$P\{\text{odbacivanje } H_0\} = P\{\overline{X} \geq 11,753\} + P\{\overline{X} \leq 8,247\}$$

$$= P\left\{\frac{\overline{X}-9,2}{0,894} \geq \frac{11,753-9,2}{0,894}\right\} + P\left\{\frac{\overline{X}-9,2}{0,894} \leq \frac{8,247-9,2}{0,894}\right\}$$

$$= P\{Z \geq 2,856\} + P\{Z \leq -1,066\} =$$

$$= 0,0021 + 0,1432$$

$$= 0,1453$$

Time, kada je vrijednost signala 9,2, postoji 85,47 posto šanse da test sa 0,05 nivoom značajnosti neće odbaciti nultu hipotezu da je vrijednost signala jednaka 10.

3.3 Statistički testovi

Ako znamo realizovane vrednosti prostog slučajnog uzorka obeležja X, možemo postaviti neke pretpostavke o raspodeli obeležja X, takozvane **statističke hipoteze**. Ako se hipoteza odnosi na vrednost parametra poznatog oblika raspodele, tada je u pitanju **parametarska hipoteza**, a ako se pretpostavka odnosi na funkciju raspodele, onda je to **neparametarska hipoteza**.

Provera hipoteze se naziva **statistički test**. Kod svakog statističkog testa unapred je definisan **prag značajnosti** α, koji predstavlja najveću dozvoljenu verovatnoću greške I vrste tj. verovatnoću da smo nultu hipotezu odbacili iako je zapravo tačna.

Obradićemo nekoliko parametarskih i neparametarskih testova.

3.3.1 Parametarski testovi

Zajednička karakteristika svih parametarskih testova je da unapred znamo raspodelu obeležja, a testom proveravamo pretpostavljene vrednosti pojedinih parametara te raspodele (npr. m ili σ kod normalne raspodele, p kod binomne raspodele, itd...). Razlikujemo dve osnovne kategorije ovih testova:

- parametarske testove jednog uzorka;
- parametarske testove dva uzorka.

Kod parametarskih testova **jednog uzorka** nulta hipoteza je oblika $H_0(\theta = \theta_0)$, gde je θ nepoznati parametar raspodele obeležja, a θ_0 njegova pretpostavljena vrednost. Osnovni način provere ovakvih hipoteza je pomoću **statističkog testa značajnosti**, koji se sastoji u tome da odaberemo odgovarajuću statistiku $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ u kojoj figuriše nepoznati parametar θ i čija raspodela nam je poznata. Uz pretpostavku da je $\theta = \theta_0$, dobićemo konkretnu vrednost statistike $U = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ako je α^*, verovatnoća odstupanja statistike U od realizovane vrednosti, manja od unapred zadatog praga značajnosti α, hipotezu odbacujemo, u protivnom je ne odbacujemo. Alternativni način provere parametarskih hipoteza jednog uzorka je pomoću **intervala poverenja**. Za zadati prag značajnosti α napravimo interval poverenja $\mathbf{I}$ za traženi parametar θ, sa nivoom poverenja $\beta = 1 - \alpha$. Ako pretpostavljena vrednost $\theta_0 \in \mathbf{I}$, nultu hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α. U protivnom je odbacujemo.

Kod parametarskih testova **dva uzorka** cilj je da utvrdimo da li dva uzorka pripadaju istoj populaciji tj. da li imaju iste vrednosti parametara raspodele. Zbog toga je nulta hipoteza oblika $H_0(\theta_1 = \theta_2)$.

I **Test jednakosti srednjih vrednosti dva uzorka sa normalnom raspodelom**

Nulta hipoteza je oblika $H_0(m_1 = m_2)$. Ovaj test se koristi samo kada se standardne devijacije mogu smatrati jednakim. Neka su n_1 i n_2 obimi uzoraka, $\bar{X}_1$ i $\bar{X}_2$ aritmetičke sredine, a $\bar{S}_1^2$ i $\bar{S}_2^2$ uzoračke disperzije. Neka je $\beta = 1 - \alpha$.

- Ako je $n_1 + n_2 \geq 30$, možemo koristiti aproksimaciju standardizovanom normalnom raspodelom. Tada pravimo statistiku

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{\bar{S}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{S}_2^2}{n_2}}.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako realizovana vrednost $z_0 \in (-a, a)$, gde je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, a u protivnom je odbacujemo.

- Ako je $n_1 + n_2 < 30$, koristitimo Studentovu raspodelu. Tada pravimo statistiku

$$T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{(n_1-1)\bar{S}_1^2 + (n_2-1)\bar{S}_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako $t_0 \in (-a, a)$, gde je $a = t_{n_1+n_2-2, \frac{1+\beta}{2}}$, a u protivnom je odbacujemo.

II **Test jednakosti proporcija dva uzorka sa binomnom raspodelom**

Nulta hipoteza je oblika $H_0(p_1 = p_2)$. Neka su n_1 i n_2 obimi uzoraka, k_1 i k_2 brojevi pozitivnih realizacija u uzorcima, a $\bar{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$ i $\bar{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$ realizovane uzoračke proporcije. Neka je $\beta = 1 - \alpha$. Formiramo statistiku

$$Z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{Se(p_1 - p_2)}, \quad Se(p_1 - p_2) = \sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}, \quad p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}, \quad q = 1 - p.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako $z_0 \in (-a, a)$, gde je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, a u protivnom je odbacujemo.

Navedeni postupci se odnose na tzv. **dvostrane** testove, u kojima je alternativna hipoteza oblika $H_1(\theta \neq \theta_0)$ tj. $H_1(\theta_1 \neq \theta_2)$. Osim ovih, postoje i tzv. **jednostrani** testovi, u kojima kao alternativu nultoj hipotezi postavljamo nepotpunu negaciju polaznog tvrđenja (npr. $H_1(\theta > \theta_0)$ ili $H_1(\theta_1 < \theta_2)$).

---

[172] *Kocka za igru je na slučajan način bačena 1000 puta. Šestica je pala 200 puta. Testirati hipotezu da je kocka ispravna sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.*

Rešenje: **I način**: Pošto je verovatnoća da na ispravnoj kocki padne šestica jednaka $\frac{1}{6}$, zadatak ćemo rešiti tako što ćemo testirati hipotezu da je proporcija šestica u svim bacanjima jednak $p_0 = \frac{1}{6}$. Dakle, nulta hipoteza je $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$, a alternativna $H_1(p_0 \neq \frac{1}{6})$. Po Moavr-Laplasovoj teoremi za slučajnu promenljivu sa Binomnom raspodelom $K : \mathcal{B}(n, p)$ važi

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{K}{n} - p_0\right| \geq \left|\frac{k}{n} - p_0\right|\right) = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|k - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)\right) = \alpha^* .$$

Obratiti pažnju na malo i veliko slovo k (i K) u prethodnoj formuli. K je oznaka za slučajnu promenljivu a k za realizovanu vrednost te slučajne promenljive, u ovom slučaju ceo broj. Imamo

$$\alpha^* = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|200 - 1000 \cdot \frac{1}{6}|}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})}}\right)\right) = 2(1 - \phi(2.83)) = 2(1 - 0.9977) = 0.0046 .$$

Kako je $\alpha^* < \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu. Zaključujemo da je kocka neispravna.

II način: Testiramo nultu hipotezu $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$. Napravićemo interval poverenja za nepoznatu proporciju, sa nivoom poverenja $\beta = 1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$ i ustanoviti da li se pretpostavljena vrednost $p_0 = \frac{1}{6} = 0.167$ u njemu nalazi. Iz datih podataka zaključujemo da je $n = 1000$, $k = 200$, $\bar{p} = \frac{200}{1000} = 0.2$, $\bar{q} = 1 - 0.2 = 0.8$ i $a = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$, pa je

$$I = \left(0.2 - 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{999}}, 0.2 + 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{999}}\right) = (0.168, 0.232).$$

Pošto $p_0 \notin (0.168, 0.232)$, hipotezu ne prihvatamo sa ovim pragom značajnosti.

Napomena. Kada je pretpostavljena vrednost blizu granice prihvatanja tj. kada je α^* blisko vrednosti α, promena praga značajnosti bi mogla promeniti zaključak. Međutim, smanjenjem verovatnoće greške I vrste dolazi do povećanja verovatnoće **greške II vrste**, koju činimo ako prihvatimo nultu hipotezu a ona je u stvari netačna. Verovatnoća greške druge vrste se samo za neke testove može izračunati. Zbog toga se u praksi retko uzima prag značajnosti manji od 0.01.

Optimalno rešenje u ovakvim situacijama je ponavljanje ispitivanja, sa povećanjem obima uzorka.

---

[173] *Prema ranijim ispitivanjima, 15% zaposlenih u bankama smatra svoj posao visoko stresnim. Od 120 slučajno odabranih radnika banke X, 44 njih smatra svoj posao visoko stresnim. Testirati da li procenat prisutnosti stresa u banci X odgovara prosečnom procentu u bankama, sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Testiramo nultu hipotezu $H(p_0 = 0.15)$ pomoću 95%-og intervala poverenja za proporciju. Realizovana proporcija je $\bar{p} = \frac{44}{120} = 0.37$, $\bar{q} = 0.63$, $n = 120$ i $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$.

$$I = \left(0.37 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{119}}, 0.37 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{119}}\right) = (0.283, 0.457).$$

Pošto $p_0 \notin (0.283, 0.457)$, hipotezu ne prihvatamo sa pragom značajnosti 0.05 tj. zaključujemo da nivo stresa u banci X ne odgovara proseku.

---

[174] *Za ocene na pismenom ispitu u slučajnom uzorku đaka petih razreda iz zadatka broj* [165] *testirati hipotezu da je srednja ocena na pismenom ispitu jednaka* $m_0 = 3.50$ *sa pragom značajnosti*

(a) $\alpha = 0.05$ *(b)* $\alpha = 0.01$

(Sa poznatim standardnim odstupanjem ocena na pismenom $\sigma = 1.4$.*)*

Rešenje: Testiranje nulte hipoteze $H_0(m = m_0)$ se može svesti na jednostavnu proveru da li data vrednost m_0 upada u interval poverenja širine $\beta = 1 - \alpha$. Kako smo u zadatku [165] pronašli interval poverenja za $\beta = 0.95$: $I = (2.3385, 3.3757)$, i kako naša vrednost 3.50 ne upada u njega, zaključujemo da se nulta hipoteza pod (a) odbacuje.

Rešimo zadatak pod (b) pomoću testa značajnosti. Naime, kad se α smanji na 0.01, to je ekvivalentno sa tim da se β poveća na 0.99, odnosno, da se interval poverenja proširi. Verovatnoću α^* moramo izračunati, jer se interval poverenja proširio pa možda zadata vrednost upadne u njega.

$$\alpha^* = \mathsf{P}\left(|\bar{X}_n - m_0| \geq |\bar{x}_n - m_0|\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geq \left|\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\right)$$

Upotrebićemo podatke $n = 30$ i $\bar{x}_n = 2.8$ iz zadatka [165]

$$\alpha^* = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right) = 2(1 - \phi(2.74)) = 2(1 - 0.9969) = 0.00614\,.$$

Kako je $\alpha^* < \alpha$, i pod (b) odbacujemo nultu hipotezu, odnosno, zaključujemo da srednja vrednost nije jednaka 3.50.

Napomena. Da smo prvo rešili pod (b), automatski bi imali da se nulta hipoteza pod (a) odbacuje, jer je pod (a) veći prag značajnosti nego pod (b).

[175] *Poznato je da standardna vrednost visine krvnog pritiska kod zdravih osoba iznosi* $m_0 = 115\,mmHg$. *Za podatke iz zadatka* [164] *testirati da li je srednja vrednost krvnog pritiska zdravih regruta jednaka standardnoj sa pragom značajnosti* 5%.

Rešenje: Testiramo nultu hipotezu $H_0(m = 115)$. Ne možemo iskoristiti interval poverenja dobijen u zadatku [164] zbog promenjenog nivoa poverenja (sada je $\beta = 1 - 0.05 = 0.95$). Ostale podatke, međutim, možemo iskoristiti: $n = 26$, $\bar{x}_n = 120.154$ i $\bar{s}_n = 8.3006$. Obim uzorka je manji od 30, pa vrednost a nalazimo iz tablice Studentove raspodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.95$, $a = t_{26-1, \frac{1+0.95}{2}} = t_{25,0.975} = 2.06$.

Traženi interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta je

$$I = (120.154 - 2.06 \cdot \frac{8.3006}{\sqrt{25}}, 120.154 + 2.06 \cdot \frac{8.3006}{\sqrt{25}}) = (116.734, 123.574).$$

Pošto $115 \notin (116.734, 123.574)$, hipotezu odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05 i zaključujemo da srednja vrednost pritiska zdravih regruta nije jednaka srednjoj visini pritiska zdravih osoba.

---

[176] *Dati su podaci anketiranih putnika GSP-a o tome koliko dugo su čekali autobus:*

vreme čekanja [min]	*[0,3)*	*[3,4)*	*[4,5)*	*[5,6)*	*[6,7)*	*[7,9)*	*[9,17]*
broj putnika	*20*	*15*	*12*	*8*	*5*	*6*	*9*

Testirati hipotezu da je srednja vrednost čekanja jednaka 5 minuta i 45 sekundi, sa pragom značajnosti

(a) $\alpha = 0.05$ *(b)* $\alpha = 0.10$.

Rešenje: **I način**: Napravićemo odgovarajuće intervale poverenja, sa nivoima poverenja 95% i 90%, i ustanoviti da li se pretpostavljena vrednost $m_0 = 5min\ 45s = 5.75min$ nalazi u nekom od njih. Iz intervalno datog uzorka računamo potrebne veličine:

$$n = \sum f_i = 75, \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum x_i f_i = (1.5 \cdot 20 + \cdots + 13.0 \cdot 9)/75 = 5.04,$$

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 f_i - \bar{x}_n^2 = (1.5^2 \cdot 20 + \cdots + 13.0^2 \cdot 9)/75 - 5.04^2 = 12.3317, \quad \bar{s}_n = 3.512.$$

Pošto je obim uzorka veći od 30, tablične vrednosti čitamo iz tablice normalne raspodele: $a_{95\%} = 1.96$ i $a_{90\%} = 1.64$.

$$I_{95\%} = (5.04 - 1.96\frac{3.512}{\sqrt{74}}, 5.04 + 1.96\frac{3.512}{\sqrt{74}}) = (4.24, 5.84),$$

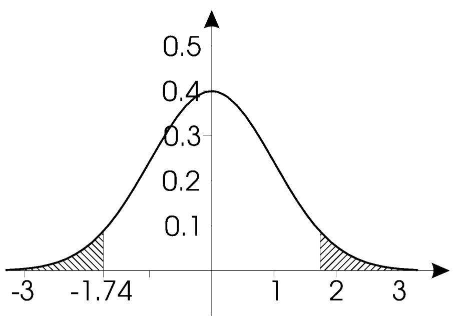
$$I_{90\%} = (5.04 - 1.64\frac{3.512}{\sqrt{74}}, 5.04 + 1.64\frac{3.512}{\sqrt{74}}) = (4.37, 5.71).$$

Zaključujemo da pod (a) hipotezu $H(m_0 = 5.75)$ možemo prihvatiti sa pragom značajnosti 0.05 jer $5.75 \in I_{95\%}$, ali da je, pod (b), ne možemo prihvatiti sa pragom značajnosti 0.10, zato što $5.75 \notin I_{90\%}$. Budući da se zaključak menja u zavisnosti od nivoa značajnosti, on nije pouzdan i preporučuje se ponovno ispitivanje, po mogućnosti sa većim brojem ispitanika.

II način: Predstavićemo posmatrane intervale aritmetičkim sredinama leve i desne granice.

x_i	1.5	3.5	4.5	5.5	6.5	8.0	13.0
f_i	20	15	12	8	5	6	9

Obeležje „dužina čekanja autobusa” možda i nema normalnu raspodelu, ali, na osnovu centralne granične teoreme, možemo na srednju vrednost posmatranog obeležja primeniti testiranje hipoteze o matematičkom očekivanju m normalne raspodele kad σ nije poznato. Dakle, koristićemo slučajnu promenljivu sa Studentovom t_{n-1} raspodelom $Z = \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$. Potrebna deskriptivno statistička obeležja uzorka $n = 75$, $\bar{x}_n = 5.04$ i $\bar{s}_n = 3.51166$ su izračunata u prvom načinu rešavanja zadatka.



Pretvorimo 5 minuta i 45 sekundi u 5.75 minuta. Ako je nulta hipoteza tačna, za realizovanu vrednost Studentove statistike dobijamo

$$z = \frac{5.04 - 5.75}{3.51166}\sqrt{74} = -1.74\,.$$

Verovatnoća α^* odstupanja srednje vrednosti od zadate $m_0 = 5.75$ koja se računa po formuli

$$\alpha^* = \mathsf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right| \geq \left|\frac{\bar{x}_n - m_0}{\bar{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right)$$

predstavlja na slici šrafiranu oblast. Ali, nju nije lako odrediti pomoću tablica kojima raspolažemo. Umesto toga, mi ćemo uporediti da li je ta verovatnoća manja ili veća od datog praga značajnosti.

Iz tablica sa kraja knjige možemo očitati vrednosti broja a takvog da je površina ispod krive gustine Studentove raspodele od $-\infty$ do a jednaka zadatoj verovatnoći.

Pod (a) ćemo naći a za verovatnoću $1 - \alpha/2 = 0.975$. Pošto $n = 75$ nema u tablicama, uzimamo a za najbližu vrednost $n = 60$. Očitavamo $a = 2.000$. Kako je taj broj veći od apsolutne vrednosti $|z| = 1.74$, to je ekvivalentno sa tim da je $\alpha^* > \alpha$, odnosno, da se nulta hipoteza ne odbacuje.

Pod (b) dobijamo za $1 - \alpha/2 = 1 - 0.10/2 = 0.95$ (i najbliže $n = 60$) $a = 1.671$. Pošto je $|z| = 1.74 > a = 1.671$, odbacujemo nultu hipotezu.

Da bismo lakše pamtili, napravićemo tabelu.

$\lvert z\rvert < a$	$\alpha^* > \alpha$	H_0 se ne odbacuje
$\lvert z\rvert > a$	$\alpha^* < \alpha$	H_0 se odbacuje

Broj a se čita iz tablice tako da je integral (površina) gustine Studentove raspodele od $-\infty$ do a jednaka $1 - \alpha/2$ (za jednostrani test), odnosno jednaka $1 - \alpha$ (za dvostrani test) gde je α je zadati prag značajnosti.

[177] *Fabrika deterdženata je otvorila novu liniju za pakovanje. Nova linija je izrađena po tehnologiji za koju se tvrdi da ima disperziju mase deterdženta u pakovanju istu kao i prethodna linija tj.* $\sigma_0^2 = 55.8$. *Iz slučajno odabranog uzorka* $n = 30$ *pakovanja je izračunata uzoračka disperzija i utvrđeno je da ona iznosi* $\bar{s}_n^2 = 65.2$. *Testirati datu tvrdnju sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.1$.

Rešenje: Nulta hipoteza glasi $H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ i testiraćemo je pomoću jednostranog intervala poverenja za nepoznatu disperziju.
Poznato je da je $n = 30$, $\bar{s}_n^2 = 65.2$. Za zadati prag značajnosti $\alpha = 0.1$, odgovarajući nivo poverenja je $\beta = 1 - \alpha = 0.9$, pa je vrednost c iz tablice Pirsonove raspodele $c = \chi^2_{n-1,\beta} = \chi^2_{29,0.9} = 39.1$. Jednostrani interval poverenja je:

$$I = \left(0, \frac{n\bar{s}_n^2}{c}\right) = \left(0, \frac{29 \times 65.2}{39.1}\right) = (0, 48.36).$$

Pošto $\sigma_0^2 = 55.8 \notin (0, 48.36)$, hipotezu o pretpostavljenoj vrednosti disperzije odbacujemo sa pragom značajnosti 0.1.

Napomena: U ovom slučaju, disperzija nove linije je statistički značajno manja od disperzije prethodne, što je po pravilu dobra osobina.

---

[178] *U dve smene jednog industrijskog pogona je tokom 10 radnih dana praćen učinak (izražen brojem proizvedenih artikala) i rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:*

I smena	*43*	*41*	*40*	*45*	*39*	*44*	*42*	*46*	*44*	*45*
II smena	*40*	*37*	*40*	*42*	*41*	*39*	*41*	*38*	*40*	*39*

može li se sa pragom značajnosti 0.05 smatrati da se učinak smena razlikuje?

Rešenje: Ovaj zadatak se odnosi na testiranje jednakosti parametara raspodele kod dva uzorka. U ovom slučaju učinak je izražen brojem proizvedenih artikala, pa ćemo zato testirati da li postoji razlika među prosečnim vrednostima tog obeležja. Nulta hipoteza se, bez obzira na cilj testiranja, uvek postavlja u formi jednakosti, dakle $H_0(m_1 = m_2)$.
Iz prostog uzorka računamo sledeće numeričke karakteristike: obimi uzoraka su $n_1 = n_2 = 10$, aritmetičke sredine su $\bar{x}_1 = 42.9$, $\bar{x}_2 = 39.7$, a uzoračke disperzije iznose $\bar{s}_1^2 = 4.89$, $\bar{s}_2^2 = 2.01$.
Pošto je zbir obima manji od 30 računamo realizovanu vrednost test-statistike T_0:

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\bar{s}_1^2 + (n_2-1)\bar{s}_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{42.9 - 39.7}{\sqrt{\frac{9\cdot 4.89 + 9\cdot 2.01}{18} \cdot \frac{20}{100}}} = 4.64.$$

Ovu vrednost upoređujemo sa tabličnom vrednošću iz tablice Studentove raspodele, koja za zadati prag značajnosti $\alpha = 0.05$ iznosi $t_{10+10-2;\frac{1+0.95}{2}} = t_{18;0.975} = 2.101$. Vidimo da $4.64 \notin (-2.101, 2.101)$, pa hipotezu H_0 odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se učinak smena razlikuje.

[179] *U fabrici iz prethodnog zadatka je testirana i preciznost rada u dve smene. U I smeni je provereno 150 slučajno odabranih proizvoda i utvrđena je neispravnost kod 5. U II smeni je provereno 90 slučajno odabranih proizvoda i pronađena su 2 neispravna. Proveriti sa pragom značajnosti 0.01 da li obe smene rade istom preciznošću.*

Rešenje: Zadatak ćemo rešiti tako što ćemo proveriti da li je proporcija neispravnih proizvoda jednaka u obe smene, stoga će nulta hipoteza glasiti $H_0(p_1 = p_2)$.
U prvoj smeni, obim uzorka je $n_1 = 150$ i bilo je 5 uspešnih realizacija provere neispravnosti, pa je u ovoj smeni uzoračka proporcija $\bar{p}_1 = 5/150 = 0.033$. Analogno, uzoračka proporcija u drugoj smeni je $\bar{p}_2 = 2/90 = 0.022$. Test statistika zahteva i računanje zajedničke proporcije $p = \frac{5+2}{150+90} = 0.029$ i vrednosti $q = 1 - 0.029 = 0.971$. Sada možemo izračunati realizovanu vrednost:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.033 - 0.022}{\sqrt{0.029 \cdot 0.971(\frac{1}{150} + \frac{1}{90})}} = 0.49.$$

Tablična vrednost $a = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$. $0.49 \in (-2.576, 2.576)$ pa hipotezu H_0 prihvatamo sa pragom značajnosti 0.01 i zaključujemo da ne postoji statistički značajna razlika u preciznosti rada između dve smene.

---

[180] *Učenici 2 odeljenja su ostvarili sledeći opšti uspeh na kraju školske godine:*

I odeljenje

uspeh	*[1,2.5)*	*[2.5,3.5)*	*[3.5,4.5)*	*[4.5, 5]*
broj đaka	5	8	6	10

II odeljenje

uspeh	*[1,2.5)*	*[2.5,3.5)*	*[3.5,4.5)*	*[4.5, 5]*
broj đaka	2	12	10	3

(a) *Sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu da se srednje ocene u ova dva razreda ne razlikuju.*

(b) *Sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu da se procenat "odlikaša"u ova dva razreda razlikuje.*

Rešenje: U delu zadatka pod (a) testiramo hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti posmatranog obeležja, pa je nulta hipoteza $H_0(m_1 = m_2)$.
Iz intervalno datog uzorka računamo numeričke karakteristike koje su potrebne za računanje test-statistike. Obimi uzoraka su $n_1 = 29$, $n_2 = 27$, aritmetičke sredine su $\bar{x}_1 = \frac{1}{29}(1.75{\cdot}5+3{\cdot}8+4{\cdot}6+4.75{\cdot}10) = 3.59$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{27}(1.75{\cdot}2+3{\cdot}12+4{\cdot}10+4.75{\cdot}3) = 3.47$, a uzoračke disperzije iznose $\bar{s}_1^2 = \frac{1}{29}(1.75^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 8 + 4^2 \cdot 6 + 4.75^2 \cdot 10) - 3.59^2 = 1.21$ i $\bar{s}_2^2 = \frac{1}{27}(1.75^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 10 + 4.75^2 \cdot 3) - 3.47^2 = 0.62$.
Pošto je zbir obima $29 + 27 = 56$ veći od 30 računamo realizovanu vrednost test-statistike Z_0:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} = \frac{3.59 - 3.47}{\sqrt{\frac{1.21}{29} + \frac{0.62}{27}}} = 0.48.$$

Tablična vrednost iz tablice Gausove raspodele iznosi $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Vidimo da $0.48 \in (-1.96, 1.96)$, pa hipotezu H_0 ne odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se prosečne ocene posmatranih odeljenja ne razlikuju statistički značajno.

Iako je cilj dela zadatka pod (b) da testira postojanje razlike u proporciji učenika sa odličnim uspehom među odeljenjima, nulta hipoteza je $H_0(p_1 = p_2)$, a alternativna je $H_1(p_1 \neq p_2)$.
U prvom odeljenju, obim uzorka je $n_1 = 29$ i bilo je 10 uspešnih realizacija (tj. odlikaša), pa je u ovom odeljenju uzoračka proporcija $\bar{p}_1 = 10/29 = 0.345$. Analogno, uzoračka proporcija u drugom odeljenju je $\bar{p}_2 = 3/27 = 0.111$. Zajednička proporcija je $p = \frac{10+3}{29+27} = 0.232$ a $q = 1 - 0.232 = 0.768$.
Realizovana vrednost statistike Z_0 je:

$$z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.345 - 0.111}{\sqrt{0.232 \cdot 0.768(\frac{1}{29} + \frac{1}{27})}} = 2.07.$$

Tablična vrednost za dati prag značajnosti je $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Pošto $2.07 \notin (-1.96, 1.96)$ hipotezu H_0 odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05 i prihvatamo hipotezu H_1 tj. zaključujemo da se odeljenja statistički značajno razlikuju po proporciji odličnih učenika.

---

[181] *Ispitivanje iz Zadatka* [176] *o vremenu čekanja autobusa je ponovljeno. U novom ispitivanju, anketirano je ukupno 120 putnika GSP-a. Utvrđeno je da je prosečno vreme čekanja 4.52 minuta, sa disperzijom od 10.67 minuta. Pritom, 42 ispitanika su čekala autobus bar 5 minuta. Sa pragom značajnosti 0.05 proveriti da li se kod ovog i prethodnog ispitivanja*

(a) *razlikuje prosečno vreme čekanja autobusa;*

(b) *razlikuje proporcija putnika koji su čekali autobus bar 5 minuta.*

Rešenje: (a) Nulta hipoteza je $H_0(m_1 = m_2)$.
U zadatku [176] su izračunate relevantne vrednosti za prvo ispitivanje: $n_1 = 75$, $\bar{x}_1 = 5.04$ i $\bar{s}_1^2 = 12.33$. Dati podaci za drugo ispitivanje su: $n_2 = 120$, $\bar{x}_2 = 4.52$ i $\bar{s}_2^2 = 10.67$. Ukupan obim uzoraka $75 + 120 = 195$ je veći od 30, tako da koristimo sledeću statistiku:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} = \frac{5.04 - 4.52}{\sqrt{\frac{12.33}{75} + \frac{10.67}{120}}} = 1.03.$$

Odgovarajuća tablična vrednost iznosi $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Izračunata vrednost $1.03 \in (-1.96, 1.96)$, pa hipotezu H_0 ne odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se prosečna vremena čekanja autobusa u dva ispitivanja ne razlikuju statistički značajno.
(b) U ovom slučaju je nulta hipoteza $H_0(p_1 = p_2)$.
Iz tabele iz zadatka [176] možemo videti da je broj ispitanika koji su čekali 5 ili više minuta $k_1 = 8 + 5 + 6 + 9 = 28$, pa za prvo ispitivanje uzoračka proporcija ima vrednost $\bar{p}_1 = 28/75 = 0.373$. Kod ponovljenog ispitivanja, uzoračka proporcija je $\bar{p}_2 = 42/120 = 0.35$. Zajednička proporcija je $p = \frac{28+42}{75+120} = 0.359$ pa je $q = 1 - 0.359 = 0.641$.
Realizovana vrednost statistike Z_0 iznosi:

$$z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.373 - 0.35}{\sqrt{0.359 \cdot 0.641(\frac{1}{75} + \frac{1}{120})}} = 0.32.$$

Tablična vrednost za dati prag značajnosti je $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Pošto $0.32 \in (-1.96, 1.96)$ hipotezu H_0 prihvatamo sa pragom značajnosti 0.05 i zaključujemo da se proporcija putnika koji su čekali autobus bar 5 minuta ne razlikuje statistički značajno između dva ispitivanja.

---

[182] *Proizvođač lekova tvrdi da novi lek pomaže u barem 80% slučajeva. U slučajnom uzorku od 80 bolesnika poboljšanje je osetilo 56. Testirati tvrdnju proizvođača sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Realizovana proporcija izlečenih je $\frac{k}{n} = \frac{56}{80} = 0.70 = 70\%$. Tvrdnja proizvođača ne bi ni bila dovedena u pitanje da je bilo više od 80% izlečenih. Tako da ćemo sad testirati hipotezu $H_0(p = p_0)$ protiv alternativne $H_1(p < p_0)$. To je takozvani jednostrani test. Ako je H_0 tačna, onda je verovatnoća da je odstupanje od zadate proporcije veće od realizovane vrednosti odstupanja

$$\mathsf{P}\left(p_0 - \frac{K}{n} \geq p_0 - \frac{k}{n}\right) = \mathsf{P}\left(\frac{K}{n} - p_0 \leq \frac{k}{n} - p_0\right) =$$

(Množimo sa $\sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}}$.)

$$= \mathsf{P}\left(\frac{K - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \alpha^*.$$

Izračunajmo α^* približno pomoću Moavr-Laplasove teoreme

$$\alpha^* \approx \phi\left(\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \phi\left(\frac{56 - 80 \times 0.80}{\sqrt{80 \times 0.80 \times (1 - 0.80)}}\right) = \phi(-2.23607).$$

U tablicama normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele očitavamo $\alpha^* \approx \phi(-2.24) = 1 - \phi(2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125$.

Kako je $\alpha^* < \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu. Proizvođač nije u pravu. Napomenimo da nultu hipotezu ne bismo mogli odbaciti da je prag značajnosti bio $\alpha = 0.01$.

Razlog upotrebe Moavr-Laplasove teoreme za računanje tražene verovatnoće je u problemima sa računanjem verovatnoće u binomnoj raspodeli. Naime, za veliko n teško je izračunati binomne koeficijente. Ako se, pak, mogu izračunati veći binomni koeficijenti, tražena verovatnoća se može i direktno izračunati.

Direktnom primenom binomnih koeficijenata, odnosno, definicije verovatnoće u binomnoj raspodeli dobijamo

$$\mathsf{P}\left(p_0 - \frac{K}{n} \geq p_0 - \frac{k}{n}\right) = 1 - \mathsf{P}(K > k) = 1 - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{n}{m} p_0^m (1-p_0)^{n-m}$$

Poslednju verovatnoću možemo izračunati na kompjuteru pomoću programa koji koristi algebru dvostruke preciznosti. Dobijamo

$$\alpha^* = 1 - \binom{80}{57} 0.8^{57} 0.2^{23} - \binom{80}{58} 0.8^{58} 0.2^{22} - \cdots - 0.8^{80} = 0.0217.$$

Vidimo da je dobijena verovatnoća različita od one dobijene pomoću Moavr-Laplasove teoreme, ali je rezultat isti: nulta hipoteze se odbacuje, jer je i dalje $\alpha^* = 0.0217 < 0.05 = \alpha$.

---

[183] *Poznato je da je masa dečaka od deset godina starosti raspoređena po normalnoj raspodeli sa srednjom vrednošću* $m_0 = 37kg$ *i standardnim odstupanjem* $\sigma = 10kg$. *U jednoj školi je merena masa* $n = 36$ *dečaka i dobijena je aritmetička sredina mase* $\bar{x}_n = 40kg$. *Testirati hipotezu da posmatrana deca imaju masu veću od srednje vrednosti* m_0, *sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.01$.

Rešenje: Nulta hipoteza $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(m > m_0)$.

Ovo je jednostrani test. Interesuje nas verovatnoća

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathsf{P}\left(\bar{X}_n - m_0 \geq \bar{x}_n - m_0\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

Kad uvrstimo naše podatke i iz tablice za normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu očitamo vrednost Laplasove funkcije ϕ, dobijamo

$$\alpha^* = 1 - \phi\left(\frac{40 - 37}{10}\sqrt{36}\right) = 1 - \phi(1.8) = 1 - 0.9641 = 0.0359.$$

Kako je dobijena verovatnoća veća od praga značajnosti, ne odbacujemo nultu hipotezu da masa dece odgovara standardu.

Napomena. Da je prag značajnosti bio $\alpha = 0.05$, odnosno, da smo imali dozvolu da grešimo pri konstataciji povećane mase u do 5% slučajeva, odbacili bismo nultu hipotezu i zaključili da deca imaju masu veću od srednje vrednosti.

Homogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima je oblika

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad \dots(1)$$

gdje su $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ konstante.
Ova jednačina se uvijek može napisati u obliku

$$a_0\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_3\right)\dots\left(\frac{d}{dx}-\lambda_{n-1}\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_n\right) y = 0$$

ako uvedemo oznake za $\frac{d}{dx}$ pišući $\frac{d}{dx} = \lambda$ ovo postaje

$$a_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)\, y = 0.$$

Jednačina

$$a_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n) = 0 \qquad \dots(2)$$

se naziva <u>karakteristična jednačina</u> dif. jednač. (1), a korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ se nazivaju <u>karakteristični korijeni</u>.

Da bi odredili opšte rješenje diferencijalne jednačine (1) prvo je potrebno odrediti karakterističnu jednačinu oblika (2).

a) Neka je $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$ (n različitih rješenja). Tada je

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

opšte rješenje.

Npr. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$ $\qquad y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ je opšte rješenje

b) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$. Tada je

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

opšte rješenje.
U opštem slučaju, ako se korijen λ pojavi m puta u opštem rješenju mu odgovara faktor:

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x} + \dots + C_m x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

Npr. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$

$(\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0$ $\qquad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ je opšte rješenje

c) Ako su koeficijenti jednačine (1) realni i ako je $\alpha + i\beta$ kompleksan korijen jednačine (2) tada je korijen i $\alpha - i\beta$. Odgovarajući član u opštem rješenju je

$$A e^{(\alpha+i\beta)} + B e^{(\alpha-i\beta)} = e^{\alpha x}(A e^{i\beta x} + B e^{-i\beta x})$$
$$= e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

gdje su A, B, C_1, C_2 proizvoljne konstante.

Npr. $y'' - 4y' + 5y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$ $\qquad y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ je opšte rješenje

Pokazati da vrijedi jednakost

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)y=\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\left(\frac{d}{dx}-a\right)y.$$

Rj.

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)y= \qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)(y'-cy)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-a\right)(y''-cy'-by'+bcy)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-a\right)(y''-(b+c)y'+bcy)$$

$$=y'''-(b+c)y''+bcy'-ay''+a(b+c)y'-abcy$$

$$=y'''-(a+b+c)y''+(ab+ac+bc)y'-abcy \qquad \ldots(1)$$

$$\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\left(\frac{d}{dx}-a\right)y=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)(y'-ay)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)(y''-ay'-cy'+acy)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)(y''-(a+c)y'+acy)$$

$$=y'''-(a+c)y''+acy'-by''+b(a+c)y'-abcy$$

$$=y'''-(a+b+c)y''+(ab+ac+bc)y'-abcy \qquad \ldots(1)$$

Kako je (1) = (2) to vrijedi data jednakost.

Provjeriti da li $y=c_1e^{ax}+c_2e^{bx}+c_3e^{cx}$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)y=0.$$

Rj. Želimo pokazati da je

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\left(c_1e^{ax}+c_2e^{bx}+c_3e^{cx}\right)=0$$

Izračunajmo $\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)c_1e^{ax}$.

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)c_1e^{ax}=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\left(\frac{d}{dx}-a\right)c_1e^{ax}=$$

$$=c_1\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\underbrace{\left(a\cdot e^{ax}-ae^{ax}\right)}_{=0}=0$$

Slično bi pokazali za druga dva člana.

Primjetimo da diferencijalnu jednačinu

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)y=0$$

možemo napisati u obliku

$$y'''-(a+b+c)y''+(ab+ac+bc)y'-abcy=0$$

Provjeriti da li $y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 x^2 e^{mx}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 y = 0$.

Rj. $\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 c_1 e^{mx} = \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \left(\frac{d}{dx} - m\right) c_1 e^{mx} =$

$$= c_1 \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \underbrace{\left(m e^{mx} - m e^{mx}\right)}_{=0} = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 c_2 x e^{mx} = c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \left(\frac{d}{dx} - m\right) x e^{mx} =$$

$$= c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \left(e^{mx} + m x e^{mx} - m x e^{mx}\right) =$$

$$= c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(\frac{d}{dx} - m\right) e^{mx} = c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(m e^{mx} - m e^{mx}\right) = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 c_3 x^2 e^{mx} = \underset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} = 2\left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 c_3 x e^{mx} = \ldots =$$

$$= 2\left(\frac{d}{dx} - m\right) 0 = 0 \qquad \ldots (3)$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi da data f-ja y zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu.

Odrediti opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$\left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 y = 0$$

(a) pretpostavljajući da je rješenje oblika $y = x^r e^{mx}$ i

(b) rješavajući ekvivalentan par jednačina

$$\left(\frac{d}{dx} - m\right) y = v, \quad \left(\frac{d}{dx} - m\right) v = 0.$$

Rj. (a) $\left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(\frac{d}{dx} - m\right) x^r e^{mx} =$

$$= \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(r x^{r-1} e^{mx} + m x^r e^{mx} - m x^r e^{mx}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} - m\right) r x^{r-1} e^{mx} = r(r-1) x^{r-2} e^{mx} +$$

$$+ m r x^{r-1} e^{mx} - m r x^{r-1} e^{mx} =$$

$$= r(r-1) x^{r-2} e^{mx}$$

Zadnji izraz je jednak nuli kada je $r = 0, 1$. Prema tome jednačina ima dva linearno nezavisna rješenja $y = e^{mx}$ i $y = x e^{mx}$.

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je $y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$.

(b) Ako napišemo da je $\left(\frac{d}{dx} - m\right) y = v$ tada

$$\left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(\frac{d}{dx} - m\right) y = (D - m) v = 0.$$

Riješimo jednačinu $\left(\frac{d}{dx}-m\right)v=0$

$$\frac{dv}{dx}-mv=0$$

$$dv=mv\,dx$$

$$\frac{dv}{v}=m\,dx \Rightarrow v=C_1e^{mx}$$

Sad riješimo jednačinu

$$\left(\frac{d}{dx}-m\right)y=C_1e^{mx}$$

$$y'-my=C_1e^{mx}$$ ovo je linearna difer. jednačina prvog reda

$y=uv$

$y'=u'v+uv'$

$$u'v+uv'-muv=C_1e^{mx}$$

$$u'v+\underbrace{u(v'-mv)}_{=0}=C_1e^{mx}$$

a) $v'-mv=0$

$$\frac{dv}{dx}=mv$$

$$v=C_2e^{mx}$$

b) $u'v=C_1e^{mx}$

$$u'C_2e^{mx}=C_1e^{mx}$$

$$u'=C_3$$

$$u=C_3x$$

$$y=C_4xe^{mx}$$

Time smo dobili da je opšte rješenje diferencijalne jedn.

$$y=C_1e^{mx}+C_2xe^{mx}.$$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''+y'-2y=0.$$

Rj. Ovo je homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. (koeficijenti su $1, 1, -2$).

Primjetimo da datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}-2\right)y=0 \qquad \dots(1)$$

Sad vidimo da je odgovarajuća karakteristična jednačina

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

tj. (1) možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{d}{dx}+2\right)\left(\frac{d}{dx}-1\right)y=0$$

Korijeni karakteristične jednačine su $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$

1° $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ i $\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ je opšte rješenje

2° $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R} \Rightarrow y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$ je opšte rješenje

3° $\lambda_1,\lambda_2\notin\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ $\quad y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ opšte rješ.

$y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$ je traženo opšte rješ. dif. jedn.

Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

Rj. Data je homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Formirajmo karakterističnu jednačinu

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

$$4\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$D = 1 - 4\cdot\frac{1}{4} = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

1° $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ je opšte rješ.

2° $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$ je opšte rješ.

3° $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i \quad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ je opšt. rješ.

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}$$

je opšte rješenje date diferenc. jedn.

Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Rj. Primjetimo da je data diferencijalna jednačina homogena lin. dif. jedn. sa konstantnim koeficijentima.

Formirajmo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$; $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow$

$\Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ je opšte rješenje

$$y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

je opšte rješenje date dif. jedn.

Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''' - 8y = 0$.

Rj. Data diferencijalna jednačina je homogena linearna dif. jedn. sa konstantnim koeficijentima.

Formirajmo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

$$\lambda^3 - 2^3 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$$

Ako se u rješenju karakteristične jednačine korijen λ pojavljuje r puta njemu odgovara opšte rješenje

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x} + \dots + C_r x^{r-1} e^{\lambda x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}\, x + C_3 \sin\sqrt{3}\, x)$$

opšte rješenje

Ako je $a+ib$ kompleksno rješenje karakteristične jednačine tada je i $a-ib$ također rješenje. Odgovarajući član u opštem rješenju je $Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = \dots = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ gdje su A, B, C_1, C_2 proizvoljne konstante

Riješiti diferencijalnu jednačinu $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Rj. Data je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 \qquad \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

$$\lambda = \pm i$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2+1) = 0$$

$$(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$$(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = i \qquad \lambda_{3,4} = -i$$

Ako je $a \pm bi$ kompleksan korijen karakteristične jednačine odgovarajući član u opštem rješenju je $e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$. Ako se kompleksan korijen $a \pm bi$ pojavljuje m puta, tada se u opštem rješenju pojavljuje

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + x e^{ax}(C_3 \cos bx + C_4 \sin bx) + \dots + x^{m-1} e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$$

$$y = (C_1 + C_3 x)e^{0x}\cos x + (C_2 + C_4 x)e^{0x} \sin x$$

opšte rješenje

Riješiti diferencijalne jednačine

a) $y''+y'-6y=0$

b) $y'''-y''-12y'=0$

c) $y'''+2y''-5y'-6y=0$

Rj. Sve tri date jednačine su homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

U sve tri slučaja prvo ćemo formirati karakterističnu jedn.

a)

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

Karakteristični korijeni su 2 i -3 i opšte rješenje je

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}.$$

b)

$$\lambda^3-\lambda^2-12\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-4)(\lambda+3)=0$$

Karakteristični korijeni su 0,4 i -3 i opšte rješenje je

$$y=C_1+C_2e^{4x}+C_3e^{-3x}$$

c)

$$\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)=0$$

Karakteristični korijeni su -3,-1 i 2 i opšte rješenje je

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$$

Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y'''-3y''+3y'-y=0$.

(b) $y^{IV}+6y'''+5y''-24y'-36y=0$

(c) $y^{IV}-y'''-9y''-11y'-4y=0$

Rj. Sve tri date jednačine su homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

U sve tri slučaja prvo ćemo formirati karakterističnu jednačinu.

(a)

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$$

$$(\lambda-1)^3=0$$

Karakteristični korijeni su 1, 1, 1 i opšte rješenje je

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$$

(b)

$$\lambda^4+6\lambda^3+5\lambda^2-24\lambda-36=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+3)^2=0$$

Karakteristični korijeni su 2, -2, -3, -3. Opšte rješenje je

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}+C_4xe^{-3x}.$$

(c)

$$\lambda^4-\lambda^3+9\lambda^2-11\lambda-4=0$$

$$(\lambda+1)^3(\lambda-4)=0$$

Karakteristični korijeni su -1,-1,-1, 4. Opšte rješenje je

$$y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2)+C_4e^{4x}.$$

Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y'' - 2y' + 10y = 0$ (b) $y''' + 4y' = 0$

(c) $y^{IV} + y''' + 2y'' - y' + 3y = 0$ (d) $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$

(e) $(y'' - 2y' + 5y)^2 = 0$

Rj. Sve jednačine su homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

(a) $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ su karakteristični korijeni

Opšte rješenje je $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(b) $\lambda^3 + 4\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 4) = 0$

$\lambda(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$

Karakteristični korijeni su $0, \pm 2i$.

Opšte rješenje je

$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

(c) $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$

$(\lambda^2 + 2\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

Karakteristični korijeni su $-1 \pm i\sqrt{2}$, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

Opšte rješenje je $y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x}(C_3 \cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

(d) $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = 0$

$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 9) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 3i)(\lambda - 3i) = 0$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$

opšte rješenje

(e) $(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 + 2i$ $\lambda_{3,4} = 1 - 2i$

$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + xe^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$

opšte rješenje

Zadaci za vježbu

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu

(a) $y'' + 2y' - 15y = 0$

(b) $y''' + y'' - 2y' = 0$

(c) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(d) $y^{IV} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$

(e) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(f) $y'' + 25y = 0$

(g) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$

(h) $y^{IV} + 4y'' = 0$

(i) $y^{IV} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$

(j) $y^{VI} + 9y^{IV} + 24y'' + 16y = 0$

Rješenja:

(a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$

(b) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$

(c) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

(d) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x^2 e^{2x}$

(e) $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(f) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$

(g) $y = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$

(h) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

(i) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{2x}$

(j) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x + (C_5 + C_6 x)\sin 2x$

Linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšte rješenje difer. jedn.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \qquad \dots (1)$$

gdje su $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ konstante i $Q(x) \neq 0$, je (jednaka) suma opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine (opšteg rješenja od $a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$) i bilo kojeg partikularnog rješenja jednačine (1)

$$y = y_h + y_p \quad \text{opšte rješenje}$$

y_h – opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine
y_p – neko partikularno rješenje nehomogene jednačine

Nekad se partikularno rješenje može odrediti posmatranjem. Npr. $y = \frac{1}{2}x$ je partikularno rješenje jednačine $y''' - 3y'' + 2y = x$ zato što je $y''' = y'' = 0$. Ovakve jednačine se pojavljuju rijetko i postoji nekoliko načina (metoda) za određivanje partikularnog rješenja. Najpoznatiji su:

- Metoda neodređenih koeficijenata
- Metoda varijacije konstanti

Metoda neodređenih koeficijenata

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \qquad \dots (1)$$

gdje su $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ konstante i $Q(x) \neq 0$.

Osnovni oblik partikularnog rješenja (u ovoj metodi) je

$$y_p = A r_1(x) + B r_2(x) + C r_3(x) + \dots + G r_t(x) \qquad \dots (2)$$

gdje su f-je $r_1(x), r_2(x), \dots, r_t(x)$ izrazi iz Q kao i oni izrazi koji se dobiju iz ovih diferenciranjem, a $A, B, C, \dots, G$ su konstante.

Npr. Ako je data jednačina $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = x^3$

tada $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Ako je dif. jedn. oblika $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^x + e^{3x}$

tada $y_p = Ae^x + Be^{3x}$,

zato što se ni jedan novi član ne dobije diferenciranjem e^x i e^{3x};

Ako je $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \sin ax$

tada $y_p = A \sin ax + B \cos ax$

Ako je $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \frac{1}{\sin x}$ tada ova metoda ne može odrediti partikularno rješenje zato što ćemo dobiti beskonačno mnogo izraza diferenciranjem $Q = \frac{1}{\sin x}$.

Zamjenjujući (2) u (1) dobićemo jednakost iz koje ćemo odrediti koeficijente $A, B, C, \ldots$

(vidi prvi zadatak)

Ova procedura se mora modifikovati u sljedeća dva slučaja:

a) Izraz iz Q je također izraz iz opšteg rješenja odgovarajuće homogene jedn.

Ako je izraz iz Q, recimo u, također izraz iz opšteg rješenja homogene jednačine koji odgovara korijenu λ višestrukosti s, tada u (2) uvodimo izraz $x^s u$ plus izrazi koji se dobiju iz njega diferenciranjem

Npr. $\left(\frac{d}{dx}-2\right)^2\left(\frac{d}{dx}+3\right)y = e^{2x}+x^2$

tj. $y''' - y'' - 8y' + 12y = e^{2x} + x^2$

$$\Rightarrow \quad Y_p = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x} + Ce^{2x} + Dx^2 + Ex + F$$

Prva tri člana se dobijaju iz činjenice da je izraz e^{2x} koji se nalazi u Q također izraz iz opšteg rješ. odgovar. homog. jedn. koji odgovara korijenu $\lambda=2$ višestrukosti 2; time smo koristili x^2e^{2x} i svi ostali članovi se dobiju diferenciranjem.

(vidi drugi zadatak)

b) Izraz iz Q je oblika $x^r u$, dok je u izraz koji se pojavljuje u opštem rješenju odg. homog. jedn. Ako u odgovara korijenu λ koji ima višestrukost s, (2) mora sadržavati izraz $x^{r+s}u$ plus izraze

koji se dobiju njegovim diferenciranjem.

Npr. $\left(\frac{d}{dx}-2\right)^3\left(\frac{d}{dx}+3\right) = x^2e^{2x}+x^2$

tj. $y^{IV} - 3y''' - 6y'' + 28y' - 24y = x^2e^{2x} + x^2$

$$\Rightarrow \quad Y_p = Ax^5e^{2x} + Bx^4e^{2x} + Cx^3e^{2x} + Dx^2e^{2x} + Exe^{2x} + Fe^{2x} + Gx^2 + Hx + J$$

Prvih šest članova se dobije iz činjenice da je e^{2x} dio opšteg rješenja odgov. homog. jedn. kojoj odgovara korijen $\lambda=2$ višestrukost 3.

(vidi treći zadatak)

(#) Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y''-2y'=e^x\sin x$ ZADATAK 1

(b) $y''-2y'+3y=x^3+\sin x$

Rj. Obe date jednačine su linearne diferencijalne jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

(a) $y''-2y'=0$

$$\boxed{y''-2y'=e^x\sin x = Q(x)}$$

kar. jedn. $\lambda^2-2\lambda=0$

$\lambda(\lambda-2)=0 \Rightarrow Y_h=C_1+C_2e^{2x}$

Partikularno rješenje ćemo odrediti metodom neodređ. koefic.

$Y_p=Ae^x\sin x+Be^x\cos x$ — $e^x\sin x$ je izraz iz $Q(x)$ i on se ne nalazi u Y_h

$Y_p'=\ldots=(A-B)e^x\sin x+(A+B)e^x\cos x$

$Y_p''=\ldots=-2Be^x\sin x+2Ae^x\cos x$

$$\left.\begin{array}{l} Y_p''-2Y_p'=\ldots=-2Ae^x\sin x-2Be^x\cos x \\ y''-2y'=e^x\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $-2A=1$, $-2B=0$ $\Rightarrow$ $A=-\frac{1}{2}$ $B=0$

$Y_p=-\frac{1}{2}e^x\sin x$

$Y=Y_h+Y_p$

$Y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{2}e^x\sin x$ opšte rješ.

b) $y''-2y'+3y=0 \Rightarrow$ kar. jedn. $\lambda^2-2\lambda+3=0$

$D=4-12=-8$ $\lambda_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}=1\pm i\sqrt{2}$

$Y_h=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$

Izrazi x^3 i $\sin x$ iz $Q(x)$ se ne nalaze u Y_h pa je

$Y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+E+F\sin x+G\cos x$

$Y_p'=3Ax^2+2Bx+C-G\sin x+F\cos x$

$Y_p''=6Ax+2B-F\sin x-G\cos x$

$$\left.\begin{array}{l} Y_p''-2Y_p'+3Y_p=3Ax^3+3(B-2A)x^2+(3C-4B+6A)x+ \\ \qquad +(3E-2C+2B)+2(F+G)\sin x+2(G-F)\cos x \\ y''-2y'+3y=x^3+\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$
$3A=1$
$3(B-2A)=0$
$3C-4B+6A=0$
$3E-2C+2B=0$
$2(F+G)=1$
$2(G-F)=0$

$\Rightarrow A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=\frac{2}{9}$, $E=-\frac{8}{27}$, $F=G=\frac{1}{4}$

$Y_p=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{8}{27}+\frac{1}{4}(\sin x+\cos x)$

$Y=Y_h+Y_p$

$Y=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{1}{27}(9x^3+18x^2+6x-8)+\frac{1}{4}(\sin x+\cos x)$

opšte rješenje dif. jedn.

(#) Riješiti diferencijalne jednačine

DRUGI ZADATAK

(a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x + x^2$

(b) $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + x e^{2x}$

Rj. Obe date jedn. su linear. dif. jedn. drugog reda sa konst. koefic.

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda = 1: \quad 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

$$(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\begin{array}{l} -\ \lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline \quad 3\lambda^2 - \lambda - 2 \\ -\ 3\lambda^2 - 3\lambda \\ \hline \quad 2\lambda - 2 \\ -\ 2\lambda - 2 \\ \hline \quad = \ = \end{array}$$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = \underbrace{e^x + x^2}_{= Q(x)}$$

Izraz e^x iz $Q(x)$ se nalazi i u y_h i njemu odgovara korijen $\lambda = 1$ višestrukosti 1 pa razmatramo (diferenciramo) $x e^x$ (naravno, kao i x^2).

$$y_p = A x^2 + B x + C + E x e^x + F e^x$$

$$y_p' = 2Ax + B + E x e^x + (E + F) e^x$$

$$y_p'' = 2A + E x e^x + (2E + F) e^x$$

$$y_p''' = E x e^x + (3E + F) e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} y_p''' + 2y_p'' - y_p' - 2y_p = -2A x^2 - 2(B + A)x + (4A - B - 2C) + 6E e^x \\ y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -2A = 1 \\ -2A - 2B = 0 \\ 4A - B - 2C = 0 \\ 6E = 1 \end{array} \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ C = -\frac{5}{4}$$

$E = \frac{1}{6}$, F je proizvoljno

Sad F je proizvoljno, ali kako je $C_1 e^x$ već dio iz y_h, $F e^x$ uopšte nije potrebno.

$$y_p = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} x e^x$$

$y = y_h + y_p$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} x e^x$$

opšte rješenje

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

odgov. karakt. jedn. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$$y'' - 4y' + 4y = \underbrace{x^3 e^{2x} + x e^{2x}}_{Q(x)}$$

U izrazu $x^3 e^{2x}$ iz $Q(x)$ primjetimo da se e^{2x} također pojavljuje u y_h kojem odgovara korijen $\lambda = 2$ višestrukosti dva, pa diferenciramo f-ju

$$x^{3+2} e^{2x}$$

(ovdje imamo slučaj (b) iz teksta koji se nalazi iza naslova Metoda neodređenih koeficijenata)

$$y_p = A x^5 e^{2x} + B x^4 e^{2x} + C x^3 e^{2x} + E x^2 e^{2x}$$

Primjetimo da izrazi xe^{2x} i e^{2x} nisu uključeni, zato što se pojavljuju u Y_h. Sad imamo

$$Y_p' = \dots = 2Ax^5e^{2x} + (5A+2B)x^4e^{2x} + (4B+2C)x^3e^{2x} + (3C+2E)x^2e^{2x} + 2Exe^{2x}$$

$$Y_p'' = \dots = 4Ax^5e^{2x} + (20A+4B)x^4e^{2x} + (20A+16B+4C)x^3e^{2x} + (12B+12C+4E)x^2e^{2x} + (6C+8E)xe^{2x} + 2Ee^{2x}$$

$$\left.\begin{aligned} &Y_p'' - 4Y_p' + 4Y_p = \dots = 20Ax^3e^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 6Cxe^{2x} + 2Ee^{2x} \\ &Y'' - 4Y' + 4Y = x^3e^{2x} + xe^{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{20}, \; B = 0, \; C = \frac{1}{6}, \; E = 0$$

$$Y_p = \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

$$Y = Y_h + Y_p$$

$$Y = C_1e^{2x} + C_2xe^{x} + \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

opšte rješenje

Riješiti diferencijalnu jednačinu $Y'' + 4Y = x^2 \sin 2x$.

TREĆI ZADATAK

Rj. $Y'' + 4Y = x^2 \sin 2x$ je linearna dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima

odgovar. homog je $Y'' + 4Y = 0$

kar. jedn. $\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad Y_h = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata.

Izraz $x^2 \sin 2x$ iz $Q(x)$ je oblika $x^2 \cdot u$, dok se $\overset{\text{izraz}}{u} = \sin 2x$ pojavljuje u Y_h i njemu odgovara korijen $\lambda = \pm 2i$ višestrukosti 1. Diferenciramo $x^3 \sin 2x$

$$Y_p = Ax^3\cos 2x + Bx^3 \sin 2x + Cx^2\cos 2x + Ex^2 \sin 2x + Fx\cos 2x + Gx\sin 2x$$

Primjetimo da izraz $H\cos 2x + K\sin 2x$ nismo uključili, zato što se ovi izrazi nalaze u Y_h.

$$Y_p' = \dots = 2Bx^3\cos 2x - 2Ax^3 \sin 2x + (3A+2E)x^2\cos 2x + (3B-2C)x^2\sin 2x + (2C+2G)x\cos 2x + (2E-2F)x\sin 2x + F\cos 2x + G\sin 2x$$

$$Y_p'' = \dots = -4Ax^3\cos 2x - 4Bx^3\sin 2x + (12B-4C)x^2\cos 2x + (-12A-4E)x^2\sin 2x + (6A+8E-4F)x\cos 2x + (6B-8C-4G)x\sin 2x + (2C+4G)\cos 2x + (2E-4F)\sin 2x$$

Sad

$$y_p''+4y_p = 12Bx^2\cos 2x - 12Ax^2\sin 2x + (6A+8E)x\cos 2x + (6B-8C)x\sin 2x + (2C+4G)\cos 2x + (2E-4F)\sin 2x$$

$$y''+4y = x^2\sin 2x$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -12A = 1 \\ 12B = 0 \\ 6A+8E=0 \\ 6B-8C=0 \\ 2C+4G=0 \\ 2E-4F=0 \end{array} \Rightarrow A=-\frac{1}{12}, \quad B=0,\ C=0,\ E=\frac{1}{16}, \quad F=\frac{1}{32},\ G=0$$

$$y_p = -\frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos x$$

partikularno rješenje

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos 2x$$

opšte rješenje

Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''-2y'-3y=e^{4x}$.

Rj.

Data je nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konst. koeficijentima. Opšte rješenje je oblika $y = y_p + y_h$ gdje je

y_h – opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine

y_p – neko partikularno rješenje nehomogene jednačine

karakt. jedn. $\lambda^2-2\lambda-3=0$

$$\lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1$$

$$y_h = C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

Partikularno rješenje ćemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata.

Izraz e^{4x} se ne nalazi u opštem rješenju odgovarajuće hom. lin. jednačine.

$$y_p = ae^{4x} \Rightarrow y_p' = 4ae^{4x}$$
$$y_p'' = 16ae^{4x}$$

Uvrstimo y_p, y_p' i y_p'' u $y''-2y'-3y=e^{4x}$

$$16ae^{4x}-8ae^{4x}-3ae^{4x}=e^{4x} \quad /:e^{4x}$$

$$5a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{5} \Rightarrow y_p=\frac{1}{5}e^{4x}$$

$$y=\frac{1}{5}e^{4x}+C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

je opšte rješenje diferencijalne jednačine

\# Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''+y'-2y=3xe^x$.

Rj. Data jednačina je nehomogena lin. dif. jedn. $\overbrace{\text{drugog}}^{\text{sa konst. koef.}}$ reda. Njeno opšte rješenje je oblika $y=y_p+y_h$

karakt. jedn. $\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficij.

Neka je $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x)$ nehomog lin. dif. jedn.
Pretpostavimo da se izraz $x^m u$ pojavljuje u $Q(x)$ i neka je u član opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine. Ako u odgovara korijenu λ višestrukosti s tada y_p mora sadržavati izraz $x^{m+s}u$ plus izraze koji će se pojaviti njegovim diferenciranjem.

xe^x se pojavljuje na desnoj strani diferencijalne jedn.
e^x se pojavljuje u opštem rješenju odgov. homogen. jedn. $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ y_p=ax^2e^x+bxe^x+ce^x$ $\quad \boxed{m=1,\ s=1}$

$y_p'=\dots=(ax^2+(2a+b)x+c+b)e^x$

$y_p''=\dots=(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)e^x$

Ako uvrstimo y_p, y_p' i y_p'' u $y''+y'-2y=3xe^x$ imamo ...

$(2a+3b+(6a-3)x)e^x=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{3}$, c proizvoljno

$y=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+c)e^x+C_1e^x+C_2e^{-2x}$ opšte rješenje

\# Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''+y=x\sin x$.

Rj. $y''+y=x\sin x$ je nehomogena lin. dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njeno opšte rješenje je oblika $y=y_p+y_h$.

$y''+y=0$

karakt. jedn. $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i \Rightarrow y_h=e^{0x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata.

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=Q(x)$ – nehom. lin. dif. jedn. n-tog reda sa kon. koef.

$y_p=Ar_1(x)+Br_2(x)+Cr_3(x)+\dots+Gr_t(x)$

gdje su f-je $r_1(x),\dots,r_t(x)$ izrazi iz $Q(x)$ kao i oni koje dobijemo diferenciranjem tih izraza, a A, B, C, ..., G su konstante

npr. $Q(x)=\sin ax \Rightarrow y_p=A\sin ax+B\cos ax$

Ako se
$x^m u$ pojavljuje u $Q(x)$
u se pojavljuje u y_h (višestrukosti s) $\Big\}\Rightarrow$ y_p mora sadržavati izraz $x^{m+s}u$ plus izraze koje ćemo dobiti diferenc.

$x\sin x$ se pojav. na desnoj str. dif. jedn.
$\sin x$ se pojavljuje u y_h $\Big\}\Rightarrow$ razmatramo $x^2\sin x$

$\Rightarrow$ kako je $(x^2\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x \Rightarrow$

$$(2x\sin x+x\cos x)''=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$$

$$Y_p=(ax^2+bx+c)\cos x+(dx^2+ex+f)\sin x$$

$$Y_p'=\ldots=(dx^2+(2a+e)x+b+f)\cos x+(ax^2+(b+2d)x+c+e)$$

$$Y_p''=\ldots=(-ax^2+(-b+4d)x+2a-e+2e)\cos x$$

$$-(dx^2+(4a+e)x+2b-2d+f)\sin x$$

Ako uvrstimo Y_p, Y_p' i Y_p'' u dif. jedn. $Y''+Y=x\sin x$ imamo

$$(4dx+2a+2e)\cos x+(-4ax-2b+2d)\sin x=$$
$$=x\sin x$$

$\cos x$ i $\sin x$ su linearno nezavisni pa imamo:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{uz } \cos x: & 4dx+2a+2e=0\\ \text{uz } \sin x: & -4ax-2b+2d=x\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}4d=0\\ 2a+2e=0\\ -4a=1\\ -2b+2c=0\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{4},\ b=0,\ c=\text{proizvoljno},\ d=0,\ e=\frac{1}{4},\ f=\text{proizvoljno}$$

$$Y_p=\left(-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)\cos x+\left(\frac{1}{4}x+C_2\right)\sin x$$

$$Y=\left(-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)\cos x+\left(\frac{1}{4}x+C_2\right)\sin x+C_3\cos x+C_4\sin x$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^2+C_5\right)\cos x+\left(\frac{1}{4}x+C_6\right)\sin x \quad \text{opšte rješenje}$$

Riješiti diferencijalnu jednačinu $Y''-5Y'=3x^2+\sin 5x$.

Rj.

$Y''-5Y'=3x^2+\sin 5x$ je nehomogena lin. dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$Y=Y_p+Y_h$ oblik za opšte rješenje

$$Y''-5Y'=0$$

$$\lambda^2-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-5)=0 \Rightarrow Y_h=C_1e^{0x}+C_2e^{5x}$$

$$Y_h=C_1+C_2e^{5x}$$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata.

$$\left.\begin{array}{ll}3x^2\cdot x^0 & \text{se nalazi na desnoj strani date diferencijalne jednačine}\\ x^0 & \text{se nalazi u } Y_h \text{ koji odgovara korijenu } \lambda=0 \text{ višestrukosti } 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$3x^{2+1}\cdot x^0=3x^3$$

$$Y_p=Y_{p_1}+Y_{p_2}=\underbrace{ax^3+bx^2+cx}_{Y_{p_1}}+\underbrace{d\sin 5x+e\cos 5x}_{Y_{p_2}}$$

$$Y_{p_1}=ax^3+bx^2+cx$$
$$Y_{p_1}'=3ax^2+2bx+c$$
$$Y_{p_1}''=6ax+2b$$

$$Y_{p_1}''-5Y_{p_1}'=3x^2$$

$$6ax+2b-5(3ax^2+2bx+c)=3x^2$$

$$\begin{array}{ll}x^2: & -15a=3\\ x: & 6a-10b=0\\ x^0: & 2b-5c=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}a=-\frac{1}{5}\\ b=-\frac{3}{25}\\ c=-\frac{6}{125}\end{array}$$

$$Y_{p_1} = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 - \frac{6}{25}x$$

$$Y_{p_2} = d\sin 5x + e\cos 5x$$

$$Y_{p_2}' = 5d\cos 5x - 5e\sin 5x$$

$$Y_{p_2}'' = -25d\sin 5x - 25e\cos 5x$$

$$Y_{p_2}'' - 5Y_{p_2}' = \sin 5x$$

$$(-25d+25e)\sin 5x + (-25e-25d)\cos 5x = \sin 5x$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -25d+25e=1 \\ -25e-25d=0 \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow \quad -50d = 1$$

$$d = -\frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{50}$$

$$Y_{p_2} = -\frac{1}{50}\sin 5x + \frac{1}{50}\cos 5x$$

$$Y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 - \frac{6}{125}x + \frac{1}{50}(\cos 5x - \sin 5x)$$

opšte rješenje

Odrediti oblik partikularnog rješenja difer. jedn.

a) $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$

b) $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$

c) $y'' - 2y' + y = 2xe^{x} + e^{x}\sin 2x$

d) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$

e) $y^{IV} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$

Rj. Date jednačine su homogene linearne dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

a) $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = -3 \pm i \qquad Y_h = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

Izrazi xe^{-3x} i $e^{3x}\cos x$ se ne nalaze u Y_h

$$\Rightarrow \quad Y_p = Y_{p_1} + Y_{p_2} = axe^{-3x} + be^{-3x} + ce^{3x}\cos x + de^{3x}\sin x$$

$$= (ax+b)e^{-3x} + (c\cos x + d\sin x)e^{3x}$$

b) $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$

$\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i \qquad Y_h = e^{4x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

$u = e^{4x}\sin 2x$ se nalazi u Y_h (višestrukosti 1) koji odgovara korijenu

$x \cdot u = xe^{4x}\sin 2x$ se nalazi na desnoj strani difer. jedn. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ oblik partikularnog rješenja će biti $x^{1+1}u$ plus njegovi diferen.

$$Y_p = ax^2e^{4x}\sin 2x + bxe^{4x}\sin 2x + ce^{4x}\sin 2x + dx^2e^{4x}\cos 2x + fxe^{4x}\cos 2x + ge^{4x}\cos 2x =$$

$$Y_p = \left[(ax^2+bx+c)\sin 2x + (dx^2+fx+g)\cos 2x\right] e^{4x}$$

c) $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow Y_h=(C_1+C_2x)e^x$

$e^x \sin 2x$ (ne pripada) Y_h, se ne nalazi

$u = xe^x$ se nalazi u Y_h (višestrukosti 1)

$x^0 \cdot u = xe^x$ se nalazi na desnoj strani dif. jedn. $\}$ $\Rightarrow$

odakle part. rješ. će biti $x^{1+0} u = x^2 e^x$ plus njegovi izvodi $\quad Y_p = Y_{p_1}+Y_{p_2}$

$$Y_p = (ax^2+bx+c)e^x + (d\cos 2x + f\sin 2x)e^x$$

d) $\lambda^2-4\lambda+5=0$

$\lambda_{1,2}=2\pm i \Rightarrow Y_h = e^{2x}(C_1\cos x + C_2 \sin x)$.

$$e^{2x}\sin^2 x = e^{2x}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos^2 x) = \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{2x}\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$$

$$Y''-4Y'+5Y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$$

Izrazi e^{2x} i $e^{2x}\cos 2x$ ne pripadaju Y_h (se ne nalaze u) pa

$$Y_p = ae^{2x} + b\,e^{2x}\cos 2x + c\,e^{2x}\sin 2x$$

e) $\lambda^4+5\lambda^2+4=0$

$\lambda^2=t \quad t^2+5t+4=0$

$(t+1)(t+4)=0$

$\lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2i$

$\lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda_{3,4}=\pm i$

$$Y_h = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$\sin x\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}\left(\sin(x+2x)+\sin(x-2x)\right) = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x$$

$u=\sin x$ se nalazi u Y_h

$\sin 3x$ ne pripada Y_h

$$Y_p = a\sin 3x + b\cos 3x + c\,x\sin x + d\,x\cos x + e\sin x + f\cos x$$

Zadaci za vježbu

1. Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y''+2y=e^x+2$

(b) $y''-y=e^x\sin 2x$

(c) $y''+2y'+2y=x^2+\sin x$

(d) $y''-9y=x+e^{2x}-\sin 2x$

(e) $y'''+3y''+2y'=x^2+4x+8$

(koristiti Ax^3+Bx^2+Cx).

(f) $y''+y=-2\sin x+4x\cos x$

(g) $y'''-y''-4y'+4y = 2x^2-4x-1+2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

Rješenja:

a) $y=C_1\cos\sqrt{2}\,x+C_2\sin\sqrt{2}\,x+\frac{1}{3}e^x+1$

b) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-e^x(\sin 2x+\cos 2x)\cdot\frac{1}{8}$

c) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{5}(\sin x-2\cos x)$

d) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{9}x-\frac{1}{5}e^{2x}+\frac{1}{13}\sin 2x$

e) $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{4}x$

f) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x\cos x+x^2\sin x$

g) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3e^{2x}$

Sistem linearnih jednačina

Sistem od m jednačina sa n nepoznatih zovemo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sisteme linearnih jednačina možemo riješiti:

a) Gausovom metodom
b) Kramerovom metodom (metoda determinanti)
c) Matričnom metodom
d) Kroneker-Kapelijevom metodom

Kroneker-Kapelijeva metoda

Neka je dat sistem linearnih jednačina $Ax=b$, gdje su

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}; \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix}.$$

Matricu $\overline{A}=[A \,\vdots\, b]$ zovemo proširena matrica.

Teorema (Kroneker-Kapeli):

Sistem ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\text{rang}\,A = \text{rang}\,\overline{A} = n$ (n broj nepoznatih).

Ako je $\text{rang}\,A = \text{rang}\,\overline{A} < n$ tada sistem ima ∞ mnogo rješenja. ($n-\text{rang}\,A$ nepoznatih uzima se proizvoljno)

Ako je $\text{rang}\,A < \text{rang}\,\overline{A}$ tada sistem nema rješenja.

1. Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 5z &= -5 \\ -x - y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 1. \end{aligned}$$

Rj.

$$\overline{A} = [A \,\vdots\, b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v\cdot 2}{\overset{II_v + I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v\cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$\text{rang}\,A = \text{rang}\,\overline{A} = 3$

sistem ima jedinstveno rješenje

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 0 \\ -y + z &= 1 \\ -z &= -3 \end{aligned}$$

$z = 3$

$$\begin{aligned} -x - y &= -3 \\ -y &= -2 \end{aligned}$$

$y = 2$

$-x - 2 = -3$

$x = 1$

Rješenje sistema je uređena trojka $(1,2,3)$.

2. Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
3x_1 + x_2 - x_3 &= 3\\
2x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} &= 2.
\end{aligned}
$$

Rj. $\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -4 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$

$\overset{III_v - II_v \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A} = 2 < 3$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

3-2 nepoznatih uzimamo proizvoljno

$x_3 = t$ $\qquad$ $-x_2 - 2t = 0$ $\qquad$ $x_1 - 2t + t = 1$

$-x_2 - 2x_3 = 0$ $\qquad$ $x_2 = -2t$ $\qquad$ $x_1 = t + 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t+1, -2t, t)$ gdje je $t \in \mathbb{R}$.

3. Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 1\\
2x + 4y + 6z &= 2\\
3x + 6y + 9z &= 5.
\end{aligned}
$$

Rj. $\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 6 & 2\\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 3}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

$\text{rang}\, A = 1$, $\text{rang}\, \bar{A} = 2$, $\text{rang}\, A < \text{rang}\, \bar{A}$

sistem nema rješenja.

4. Kroneker-Kapelijevom metodom diskutovati rješenja sistema za razne vrijednosti parametra λ

$$
\begin{aligned}
\lambda x + y + z &= 1\\
x + \lambda y + z &= 2\\
x + y + \lambda z &= -3.
\end{aligned}
$$

Rj. za $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ sistem ima jedinstveno rješenje $\left(\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}, \frac{-3}{\lambda-1}\right)$

za $\lambda = -2$ sistem ima ∞ mnogo rješenja $\left(\frac{3t-4}{3}, \frac{3t-5}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

za $\lambda = 1$ sistem nema rješenja

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
x - y + z &= 1\\
x - y - z &= 2\\
x + y - z &= 3\\
x + y + z &= 4
\end{aligned}
$$

Rj. - upute:

Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$

Dati sistem nema rješenja

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$x - y + z = 2$$
$$x - y - z = 3$$
$$x + y - z = 4$$
$$x + y + z = 5$$

Rj.-upute:

Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(\bar{A})$$

Dati sistem nema rješenje.

Riješiti sistem jednačina

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 8x_4 + 12x_5 = -10$$
$$3x_1 + 7x_2 - 15x_3 + 30x_4 + 45x_5 = -43$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 18x_5 = 13$$

Rj.-upute:

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 8 & 12 & -10 \\ 3 & 7 & -15 & 30 & 45 & -43 \\ -2 & -3 & 6 & -12 & -18 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{l} II_v + I_v \cdot (-3) \\ \sim \\ III_v + I_v \cdot 2 \end{array}$$

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \end{array}\right].$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang}(A) = 3 \\ \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3 \\ \text{broj nepoznatih} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

sistem ima beskonačno mnogo rješenja i dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = s$, $x_5 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = 6 + 2s + 3t$$
$$x_4 = s$$
$$x_5 = t$$
$$s, t \in \mathbb{R}$$

(#) Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 12x_5 &= -11 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 7 \\ -3x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 &= 25 \end{aligned}$$

Rj.-upute:

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\overline{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & -8 & -12 & -11 \\ -2 & -3 & 5 & 10 & 15 & 7 \\ -3 & -5 & 10 & 20 & 30 & 25 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v \cdot 3}{\overset{II_v + I_v \cdot 2}{\sim}}$$

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \text{rang}(A) = 3 \\ \text{rang}(\overline{A}) = 3 \\ \text{broj nepoznatih} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja i dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = s$, $x_5 = t$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 6 \\ x_3 &= 7 - 2s - 3t \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ s, t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(#) Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Rj.

Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\overline{C} = [C \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & \lambda \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & \lambda - 30 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 68 \end{array}\right]$$

1° $\lambda - 68 \neq 0$, $\lambda \neq 68$: rang $C = 2$, rang $\overline{C} = 3$, rang $C <$ rang $\overline{C}$. Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenje.

2° $\lambda - 68 = 0$, $\lambda = 68$: rang C = rang $\overline{C} = 2 < 4$ (broj nepoznatih)

Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi dvije promjenjive uzimamo proizvoljno, npr. $x_4 = t$, $x_1 = s$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ -8x_3 + 17x_4 &= -38 \end{aligned}$$

$x_4 = t$

$$\begin{aligned} -8x_3 + 17t &= -38 \\ -8x_3 &= -17t - 38 \\ x_3 &= \frac{17}{8}t + \frac{38}{8} = \frac{17}{8}t + \frac{19}{4} \end{aligned}$$

$x_1 = s$

$$\begin{aligned} 2s - x_2 + 3\left(\frac{17}{8}t + \frac{38}{8}\right) - 7t &= 15 \\ x_2 &= \frac{51t}{8} + \frac{114}{8} + 2s - 7t - 15 \\ x_2 &= -\frac{5}{8}t - \frac{6}{8} + 2s \\ x_2 &= 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Za $\lambda = 68$ rješenje sistema je

$$\left(s,\ 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4},\ \frac{17}{8}t + \frac{19}{4},\ t\right),\quad t, s \in \mathbb{R}$$

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4&=9\\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4&=7\\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2. \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{B}=[B\,|\,b]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 12 & 7 & \lambda & 9\\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]\end{array} \underset{\sim}{I_v\leftrightarrow IV_v} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} II_v-I_v\cdot 3\\ III_v-I_v\cdot 2\\ IV_v-I_v\cdot 4\end{array}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-8 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} III_v-II_v\\ IV_v-II_v\end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 \end{array}\right]$$

1° za $\lambda=8$ imamo $\operatorname{rang} B=\operatorname{rang}\bar{B}=2<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1=t$, $x_4=s$

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2\\ -x_3+0x_4&=1 \end{aligned}$$

$x_3=-1$

$2t+3x_2-2+2s=2$

$3x_2=4-2t-2s$

$x_2=\frac{2}{3}(2-t-s)$

Rješenje sistema (za $\lambda=8$) je $(t, \frac{2}{3}(2-t-s), -1, s)$ gdje su $s,t\in\mathbb{R}$.

2° za $\lambda\neq 8$ imamo $\operatorname{rang} B=\operatorname{rang}\bar{B}=3<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_2=t$.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2\\ -x_3&=1\\ (\lambda-8)x_4&=0 \end{aligned}$$

$x_4=0$

$x_3=-1$

$2x_1+3t-2=2$

$2x_1=4-3t$

$x_1=2-\frac{3}{2}t$

Rješenje sistema (za $\lambda\neq 8$) je $(2-\frac{3}{2}t, t, -1, 0)$ gdje su $t\in\mathbb{R}$.

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4&=11\\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4&=7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4&=9 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{A}=[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & -4 & 9 & 10 & 11\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \underset{\sim}{I_v\leftrightarrow IV_v} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 7 & 8 & 9\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{\sim}{II_v\leftrightarrow I_v}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \underset{\sim}{I_k\leftrightarrow IV_k} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 8 & -3 & 7 & 6 & 9\\ 6 & -2 & 5 & 4 & 7\\ 10 & -4 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right]\end{array} \underset{\sim}{I_k\leftrightarrow II_k} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5\\ -3 & 8 & 7 & 6 & 9\\ -2 & 6 & 5 & 4 & 7\\ -4 & 10 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right]\end{array}$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c} II_v-I_v\cdot 3\\ III_v-I_v\cdot 2\\ IV_v-I_v\cdot 4\end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -2 & 0 & -6\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3\\ 0 & -6 & -3 & \lambda-8 & -9 \end{array}\right] \underset{\sim}{II_k\leftrightarrow IV_k} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]\end{array} \underset{\sim}{III_v\leftrightarrow II_v} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c} III_v-II_v\cdot 2\\ IV_v-II_v\cdot 3\end{array}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

a) Za $\lambda=8$ imamo $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}=2<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja.

2. promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4=t$ $x_1=s$

$$\begin{aligned} -x_3-2x_4&=-3\\ -x_2+2x_1+3x_3+4x_4&=5 \end{aligned}$$

$x_3=3-2t$

$-x_2+2s+3(3-2t)+4t=5$

$x_2=2s+9-6t+4t-5$

$x_2=2s-2t+4$

Za $\lambda=8$ rješenje sistema je $(s, 2s-2t+4, 3-2t, t)$ $t,s\in\mathbb{R}$

b) Za $\lambda\neq 8$ imamo $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}=3<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevom teoremu sistem ima ∞ mnogo rješenja.

1. jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_4=t$

$$\begin{aligned} (\lambda-8)x_1&=0\\ -x_3-2x_4&=-3\\ -x_2+2x_1+3x_3+4x_4&=5 \end{aligned}$$

$x_1=0$

$x_3=3-2t$

$-x_2+3(3-2t)+4t=5$

$x_2=9-6t+4t-5=-2t+4$

Za $\lambda\neq 8$ rješenje sistema je $(0, 4-2t, 3-2t, t)$.

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 29.11.2013.

Prvi parcijalni iz Inžinjerske matematike III

Napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda rješiti sljedeći sistem

$$\begin{aligned} -\dot{x} - x + \dot{y} &= \sin t \\ \dot{x} - x + y &= e^{2t} \end{aligned}$$

2. Metodom varijacije konstanti riješiti dati sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 3y + \sin t \\ \dot{y} &= -x - y - \sin t \\ \dot{z} &= -x - 3y + 2z + 4\sin t \end{aligned}$$

3. Primjenom Laplaceove transformacije izračunati integral $\int_0^\infty te^{-3t}\sin t\,dt$.

4. Primjenom Laplaceove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$ty'' + (3t-1)y' + 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda riješiti sljedeći sistem

$$-\dot{x} - x + \dot{y} = \sin t$$
$$\dot{x} - x + y = e^{2t}$$

Rj.

$$(-D-1)x + Dy = \sin t$$
$$(D-1)x + y = e^{2t} \quad /D$$

$$(-D-1)x + Dy = \sin t \quad \ldots (I)$$
$$(D^2-D)x + Dy = 2e^{2t} \quad \ldots (II)$$

$$(I)-(II) \quad (-D-1-D^2+D)x = \sin t - 2e^{2t} \quad (-1)$$
$$(D^2+1)x = 2e^{2t} - \sin t$$
$$\ddot{x} + x = 2e^{2t} - \sin t \quad \ldots (*)$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina drugog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$$x = x_h + x_p$$

$\ddot{x} + x = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

Ako su $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ korijeni karakteristične jednačine tada je $Y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$\alpha = 0, \ \beta = 1 \Rightarrow x_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Izraz $\sin t$ sa desne strane diferencijalne jednačine (*) se pojavljuje u x_h i njemu odgovara korijen $\lambda = \pm 1$

višestrukosti 1, pa pored e^{2t} diferenciramo f-ju $\cdot \sin t$.

$$x_p = A t \sin t + B t \cos t + C \sin t + D \cos t + E e^{2t}$$

$$\boxed{(t \sin t)' = \sin t + t \cos t, \quad (t \cos t)' = \cos t - t \sin t}$$

$$\dot{x}_p = A(\sin t + t\cos t) + B(\cos t - t \sin t) + C \cos t - D \sin t + 2E e^{2t}$$
$$\dot{x}_p = A t \cos t - B t \sin t + (A-D)\sin t + (B+C)\cos t + 2E e^{2t}$$
$$\ddot{x}_p = A(\cos t - t \sin t) - B(\sin t + \boxed{t \cos t}) + (A-D)\cos t - (B+C)\sin t + 4E e^{2t}$$
$$\ddot{x}_p = -A t \sin t - B t \cos t + (-2B - C)\sin t + (2A - D)\cos t + 4E e^{2t}$$

Sad prema (*) imamo:

$$-2B \sin t + 2A \cos t + 5E e^{2t} = 2e^{2t} - \sin t$$

$$\Rightarrow \quad -2B = -1, \quad 2A = 0, \quad 5E = 2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}, \ A = 0, \ E = \frac{2}{5}$$

C i D proizvoljno, a kako je $C_1 \cos t + C_2 \sin t$ već u x_h, C i D uopšte nije potrebno

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t \cos t + \frac{2}{5} e^{2t} \quad \ldots (1)$$

F-ju $y(t)$ možemo odrediti iz druge jednačine sistema

$$y = e^{2t} + x - \dot{x} = e^{2t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t \cos t + \frac{2}{5} e^{2t}$$
$$- \left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} t \sin t + \frac{4}{5} e^{2t}\right)$$

$$y(t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{3}{5} e^{2t} \quad \ldots (2)$$

Opšte rješenje sistema su (1) i (2).

(#) Metodom varijacije konstanti riješiti dati sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x + 3y + \sin t$$
$$\dot{y} = -x - y - \sin t$$
$$\dot{z} = -x - 3y + 2z + 4\sin t$$

Rj: Rešimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = 3x + 3y$$
$$\dot{y} = -x - y$$
$$\dot{z} = -x - 3y + 2z$$

Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3+3) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

Karakteristična jednačina sistema je $-\lambda(\lambda-2)^2=0$, a njeni korijeni su $\lambda_1=0$ i $\lambda_2=2$.
Kako je $\lambda_2=2$ korijen višestrukosti 2, opšte rješenje homogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

gdje su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k=r+s-n$ gdje je

- r rang matrice $A-\lambda_2 I$
- s višestrukost korijena
- n red sistema.

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r=1$$

Kako je $s=2$ i $n=3$ to je

$$k = 1+2-3 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= A_1 + B_1 e^{2t} \\ y &= A_2 + B_2 e^{2t} \\ z &= A_3 + B_3 e^{2t} \end{aligned} \quad \ldots(1)$$

Ako (1) uvrstimo u sistem dobićemo

$$2B_1 e^{2t} = (3A_1+3A_2) + (3B_1+3B_2)e^{2t}$$
$$2B_2 e^{2t} = (-A_1-A_2) + (-B_1-B_2)e^{2t}$$
$$2B_3 e^{2t} = (-A_1-3A_2+2A_3) + (-B_1-3B_2+2B_3)e^{2t}$$

$$\begin{aligned} 3A_1+3A_2&=0 \\ -A_1-A_2&=0 \\ -A_1-3A_2+2A_3&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_1+3B_2&=0 \\ -B_1-3B_2&=0 \\ -B_1-3B_2&=0 \end{aligned}$$

... ZA VJEŽBU   ⋮ ZA VJEŽBU

$$\begin{aligned} A_1+A_3&=0 \\ A_2-A_3&=0 \end{aligned} \qquad B_1+3B_2=0$$

Tri promjenjive uzimamo proizvoljno
$A_3=C_1$
$B_2=C_2$
$B_3=C_3$

Opšte rješenje homogenog sistema je

$$x_h = -C_1 - 3C_2 e^{2t}$$
$$y_h = C_1 + C_2 e^{2t}$$
$$z_h = C_1 + C_3 e^{2t}$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t) = -C_1(t) - 3C_2(t)e^{2t}$$
$$y(t) = C_1(t) + C_2(t)e^{2t}$$
$$z(t) = C_1(t) + C_3(t)e^{2t}$$

pri čemu izvode C_1', C_2' i C_3' f-ja $C_1(t)$, $C_2(t)$ i $C_3(t)$ određujemo iz sistema

$$-C_1' - 3C_2'e^{2t} = \sin t$$
$$C_1' + C_2'e^{2t} = -\sin t$$
$$C_1' + C_3'e^{2t} = 4\sin t$$

C_1', C_2' i C_3' su nepoznate f-je i ovaj sistem možemo rješiti npr. Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3e^{2t} & 0 & \sin t \\ 1 & 1\cdot e^{2t} & 0 & -\sin t \\ 1 & 0 & e^{2t} & 4\sin t \end{array}\right] \sim \underset{\dots}{\text{ZA VJEŽBU}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5e^{-2t}\sin t \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1' = -\sin t, \quad C_2' = 0, \quad C_3' = 5e^{-2t}\sin t$$

Integracijom ovih jednačina dobijamo

$$C_1 = \cos t + D_1$$
$$C_2 = D_2$$
$$C_3 = -e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + D_3$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x(t) = -\cos t - D_1 - 3D_2e^{2t}$$
$$y(t) = D_1 + D_2e^{2t} + \cos t$$
$$z(t) = D_1 + D_3e^{2t} + \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} - 2\sin t$$

\# Primjenom Laplasove transformacije izračunati integral $\int_0^\infty t e^{-3t}\sin t \, dt$.

Rj: Prema definiciji Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

pa je $\mathcal{L}\{t\sin t\}(s) = \int_0^\infty t e^{-st}\sin t\, dt$ iz čega slijedi

$$\mathcal{L}\{t\sin t\}(3) = \int_0^\infty t e^{-3t}\sin t\, dt,$$

pa je dati integral jednak vrijednosti $\mathcal{L}\{t\sin t\}(3)$.

Kako je $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ to je

$$\mathcal{L}\{t\sin t\}(s) = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = (-1)(-1)(s^2+1)^{-2}2s = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\sin t\}(3) = \frac{2\cdot 3}{10^2} = \frac{2\cdot 3}{100} = \frac{3}{50}.$$

Prema tome

$$\int_0^\infty t e^{-3t}\sin t\, dt = \frac{3}{50}$$

Primjenom Laplasove transformacije riješiti diferencijalnu jednačinu $ty''+(3t-1)y'+3y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Rj.

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s)=sY(s)-y(0)=sY(s) \quad \text{gdje je } \mathcal{L}\{y\}(s)=Y(s),$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$$

Prema osobinama Laplasovih transformacija znamo da je

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)}, \quad \text{gdje } F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)$$

pa je

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s)=(-1)^1\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)\right)=(-1)\left(2sY(s)+s^2Y'(s)\right)$$
$$=-2sY(s)-s^2Y'(s)$$

$$\mathcal{L}\{(3t-1)y'\}=3\mathcal{L}\{ty'\}(s)-\mathcal{L}\{y'\}=3(-1)^1\underbrace{\frac{d}{ds}\left(sY(s)\right)}_{Y(s)+sY'(s)}-sY(s)$$
$$=-3Y(s)-3sY'(s)-sY(s)$$

Prema tome

$$ty''+(3t-1)y'+3y=0 \quad /\mathcal{L}$$

$$-2sY(s)-s^2Y'(s)-\cancel{3Y(s)}-3sY'(s)-sY(s)+\cancel{3Y(s)}=0$$

$$(-s^2-3s)Y'(s)-3sY(s)=0 \quad /:(-s^2-3s)$$

$$Y'(s)+\frac{3s}{s^2+3s}Y(s)=0$$ ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)}=-\frac{3s}{s^2+3s}=-\frac{3}{s+3}$$

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)}=-\frac{3}{s+3} \quad //\int$$

$$\int\frac{d(Y(s))}{Y(s)}=-3\int\frac{d(s+3)}{s+3}$$

$$\ln Y(s)=(-3)\ln(s+3)+\ln C_1$$

$$Y(s)=\frac{C_1}{(s+3)^3}$$

Iz tabele Laplasovih transformacija $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\}=\frac{2!}{(s+3)^3}$

Prema tome

$$y(t)=Ct^2e^{-3t}, \quad \text{za } C\neq 0$$

traženo rješenje

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 23.01.2014.

Drugi parcijalni iz Inžinjerske matematike III

Napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka datih u tabeli.

Početna plata	Frekvencija
47	4
48	1
49	3
50	5
51	8
52	10
54	5
56	2
57	3
60	1

Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (histograma frekvencija treba da ima 6 intervala). Na kraju odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka i mod uzorka.

2. U kutiji se nalazi 50 šarafa od kojih je 40 dobrih i 10 loših.
(20%) (*a*) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šarafa?
(80%) (*b*) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šarafa od kojih su 2 loša?

3. Među turistima u jednom skijaškom centru 60% su muškarci. Pored toga, 80% žena i 60% muškaraca su domaći turisti. Izračunati vjerovatnoću da će na slučaj odabrana osoba biti:
(*a*) državljanin naše zemlje;
(*b*) strana turistkinja.

4. Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću *slučajnog šuma*, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(40%) (*a*) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

(40%) (*b*) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

(#) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka datih u tabeli.

Početna plata	Frekvencija
47	4
48	1
49	3
50	5
51	8
52	10
54	5
56	2
57	3
60	1

Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (histogram frekvencija treba da ima 6 intervala). Na kraju odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka i mod uzorka.

Rj.

Standardnu devijaciju tražimo po formuli

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}}$$

Suma frekvencija je $4+1+3+5+8+10+5+2+3+1=42$

$$\bar{x}=\frac{47\cdot 4+48\cdot 1+49\cdot 3+50\cdot 5+51\cdot 8+52\cdot 10+54\cdot 5+56\cdot 2+57\cdot 3+60\cdot 1}{42}$$

$$=\frac{1087}{21}\approx 51,7619$$

Sredina uzorka je $\bar{x}=\frac{1087}{21}$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=4\cdot 47^2+1\cdot 48^2+\ldots+1\cdot 60^2=13\,102$$

$$s^2=\frac{13\,102-42\cdot\frac{1087}{21}}{41}=\frac{10\,928}{41}\approx 266,5366$$

Standardna devijacija uzorka je $s=16,3259$.

Raspon uzorka je $R=60-47=13$.

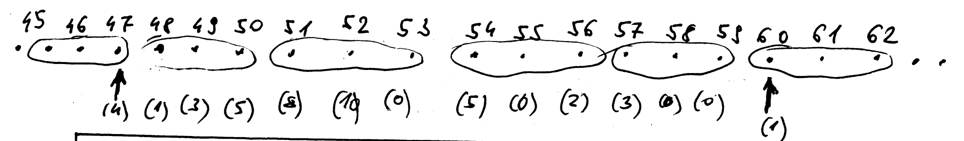
Odredimo 25-ti i 75-ti podatak uzorka

$0,25\cdot 42=10,5$ nije cijeli broj $\Rightarrow$ treba nam 11. najmanja vrijednost na listi (broj 50)

$0,75\cdot 42=31,5$ nije cijeli broj $\Rightarrow$ treba nam 32 najmanja vrijednost na listi (vrijednost 54)

Interkvartilni raspon uzorka je 4.

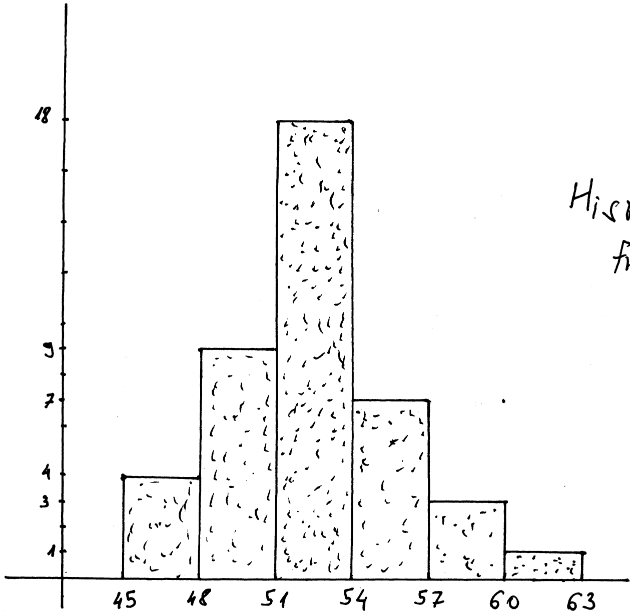
Želimo nacrtati histogram sa 6 intervala. Primijetimo da je raspon uzoraka 13 što znači da dužina intervala mora biti veća od 2.



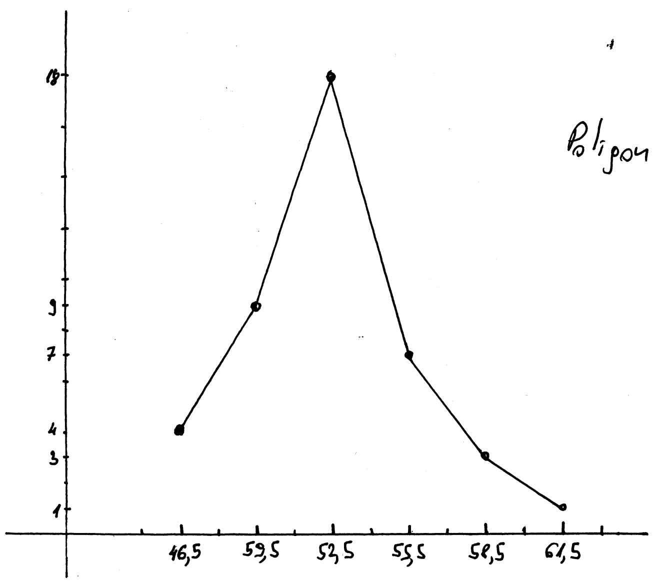
Klase intervala	Frekvencija
[45, 48)	4
[48, 51)	9
[51, 54)	18
[54, 57)	7
[57, 60)	3
[60, 63)	1

$\sum=42$

⋮
20 51
21 51
22 52
23 52
⋮



Histogram frekvencije



Poligon frekvencija

Sredinu uzorka smo već izračunali $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1087}{21} \approx 51,7619$

Broj podataka je paran, pa je medijana uzorka $\frac{51+52}{2} = 51,5$

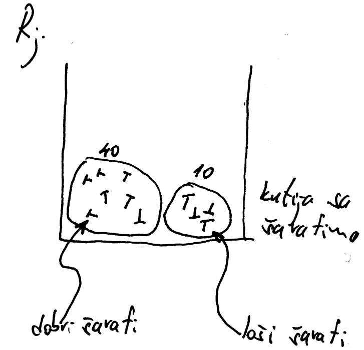
Mod uzorka je 52. (mod uzorka je po definiciji vrijednost koja ima najveću frekvenciju)

(#) U kutiji se nalazi 50 šarafa od kojih je 40 dobrih i 10 loših.

(a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šarafa?

(b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šarafa od kojih su 2 loša?

Rj:



(a) Ako zamislimo da su svi šarafi obojeni različitim bojama, problem se svodi na formiranje svih mogućih nizova od 5 boja u kome redoslijed nije bitan. Koristićemo kombinacije bez ponavljanja

$$C_5^{50} = \binom{50}{5} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2\,118\,760$$

(kombinacija bez ponavljanja, pedesetog reda, pete klase)

(b) Koliko se može formirati uzoraka od po 2 loša šarafa?

$$C_2^{10} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45.$$

Koliko se može formirati uzoraka od po 3 dobra šarafa?

$$C_3^{40} = \binom{40}{3} = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{1\cdot 2\cdot 3} = 9880$$

Sad ako svakoj kombinaciji od 2 loša šarafa pridružimo kombinaciju od 3 dobra šarafa, kao rezultat ćemo dobiti uzorak od 5 šarafa od kojih su 2 loša:

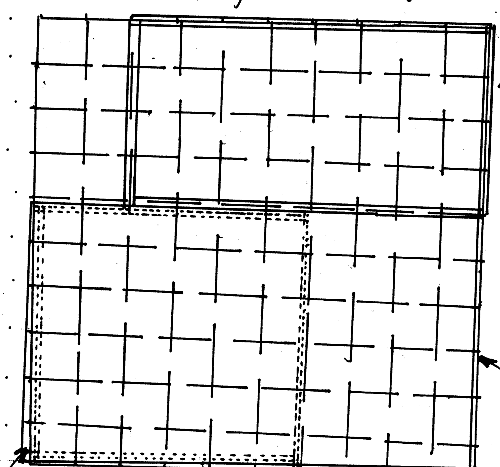
$$45\cdot 9880 = 444\,600$$

(#) Među turistima u jednom skijaškom centru 60% su muškarci. Pored toga, 80% žena i 60% muškaraca su domaći turisti. Izračunati vjerovatnoću da će na slučaj odabrana osoba biti:

(a) državljanin naše zemlje;

(b) strana turistkinja.

Rj.



<u>II način</u> – upotrebom geometrijske vjerovatnoće (vidi sliku lijevo)

(a) $P(D) = \dfrac{8\cdot 4 + 6\cdot 6}{100} = 0{,}68$

(b) $\left.\begin{array}{l} P(\check{Z}S) = \dfrac{2\cdot 4}{100} = 0{,}08 \\ P(S) = \dfrac{2\cdot 4 + 4\cdot 6}{100} = 3{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(\check{Z}|S) = 0{,}25$

<u>I način:</u>

Primjetimo da turiste u skijaškom centru možemo predstaviti kao kvadrat dimenzija 10 puta 10 cm.

Ako sa M označimo skup muških turista, tada je vjerovatnoća da je na slučajan način izabrani turista muškarac jednaka

$$P(M) = \frac{60}{100} = 0{,}6$$

a ako sa $\check{Z}$ označimo skup ženskih turista, vjerovatnoća da je slučajno izabrani turist žena

$$P(\check{Z}) = 1 - P(M) = \frac{40}{100} = 0{,}4.$$

Dalje, ako sa D označimo skup domaćih turista

$$P(D|M) = 0{,}6; \qquad P(D|\check{Z}) = 0{,}8$$

(gdje $D|M$ označava skup domaćih turista koji su muškog pola a sa $D|\check{Z}$ smo označili skup domaćih turista ženskog pola)

(a) $\left[D = D \cap (\underline{M \cup \check{Z}}) \right]$

$$P(D) = P(D\cap M) + P(D \cap \check{Z}) = P(DM) + P(D\check{Z}) =$$

$$= P(D|M)P(M) + P(D|\check{Z})P(\check{Z}) = 0{,}6\cdot 0{,}6 + 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}68.$$

Time, vjerovatnoća da je na slučaj izabrani turista domaći jednaka je 0,68.

(b) Označimo sa T skup svih turista, a sa S skup stranih turista. Primjetimo

$$T = S \cup D \quad ; \quad S \cap D = \emptyset \implies P(S) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$$

Kako je $\check{Z} = \check{Z} \cap (S \cup D) = (\check{Z} \cap S) \cup (\check{Z} \cap D)$ to je

$$P(\check{Z}) = P(\check{Z}\cap D) + P(\check{Z} \cap S) = \underline{P(\check{Z}|D)\cdot P(D)} + P(\check{Z}|S)\,P(S) \quad \ldots(*)$$

Ako iskoristimo jednakost $\underbrace{P(D|\check{Z})}_{0{,}8}\,\underbrace{P(\check{Z})}_{0{,}4} = \underline{P(\check{Z}|D)\cdot P(D)}$ na $(*)$ imamo

$$\underbrace{P(\check{Z})}_{0{,}4} = 0{,}32 + P(\check{Z}|S)\cdot 0{,}32 \implies P(\check{Z}|S) = 0{,}25$$

← vjerovatnoća da je slučajno izabrani turista ženskog pola

\# Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću slučajnog šuma, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(a) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

(b) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti kada je sredina uzorka 7,8.

Rj.

(a) Iz pretpostavke zadatka nulta hipoteza je

$$H_0: \mu = 10$$

dok je njena alternativa

$$H_1: \mu \neq 10$$

Želimo koristiti 5% nivo značajnosti, tj. $\alpha = 0{,}05$.

$z_{0,05} = ?$

$$P\{Z < z_{0,05}\} = 1 - P\{Z > z_{0,05}\} = 0{,}95$$

$$\left.\begin{array}{l} P\{Z < 1{,}64\} = 0{,}9495 \\ P\{Z < 1{,}65\} = 0{,}9505 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{0,05} = 1{,}645$$

Prisjetimo se:

H_0	H_1	Test statistika (TS)	Test α-nivoa značajnosti
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	odbaci H_0, ako je $\lvert TS\rvert \geq z_{\alpha/2}$; nemoj odbaciti, u suprotnom

p vrijednost ako je $TS = v$

$$2P\{Z \geq |v|\}.$$

Prema tome nama treba $z_{0,025}$ $(= z_{\alpha/2})$

$z_{0,025} = ?$

$$P\{Z < z_{0,025}\} = 1 - P\{Z > z_{0,025}\} = 0{,}975 \overset{\text{iz Tabele}}{\Rightarrow} z_{0,025} = 1{,}96$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}\,|11{,}6 - 10| = 1{,}79$$

Kako je ova vrijednost manja od 1,79, data hipoteza je vjerodostojna.

(b) Pretpostavimo da je $\overline{X} = 10{,}8$. Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}\,|10{,}8 - 10| = 0{,}894$$

Kako je $P\{|Z| \geq 0{,}894\} = 2P\{Z \geq 0{,}894\} = 2(1 - P\{Z \leq 0{,}894\}) =$
$= 2(1 - 0{,}8143) = 0{,}371$ (iz tabele)

slijedi da je $p = 0{,}371 \Rightarrow$ nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,371.

Za $\overline{X} = 7{,}8$ ZA VJEŽBU $\Rightarrow$ p vrijednost $= 0{,}014$

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 03.02.2014.

Pismeni ispit iz Inžinjerske matematike III

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} -\dot{x} - x + \dot{y} &= -e^t \\ \dot{x} - x + y &= e^{2t} \end{aligned}$$

2. Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = 3t^3 \sin 3t + 2t^2 e^{-4t}$.

3. Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 10 i 11 sati. Onaj koji prvi dođe čekaće 15 minuta, poslije čega odlazi. Kolika je vjerovatnoća da će se prijatelji susresti?

4. Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću *slučajnog šuma*, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(50%) (*a*) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

(50%) (*b*) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

(#) Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda riješiti sljedeći sistem

$$-\dot{x} - x + \dot{y} = -e^{t}$$
$$\dot{x} - x + y = e^{2t}$$

Rj.

$$(-D-1)x + Dy = -e^{t}$$
$$(D-1)x + y = e^{2t} \quad / D$$

$$(-D-1)x + Dy = -e^{t} \quad \ldots (I)$$
$$(D^2-D)x + Dy = 2e^{2t} \quad \ldots (II)$$

$$(I)-(II): \quad (-D-1-D^2+D)x = -e^{t} - 2e^{t} \quad / \cdot (-1)$$

$$(D^2+1)x = e^{t} + 2e^{t}$$
$$\ddot{x} + x = e^{t} + 2e^{t}$$

ovo je linearna diferenc. jednačina drugog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$$x = x_h + x_p$$

$$\ddot{x} + x = 0$$
$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i$$
$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

Prisjetimo se: Ako je $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ tada je $y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

$$x_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Primjetimo da se izrazi e^{t} i e^{2t} ne pojavljuju u homogenom rješenju, pa je

$$x_p = Ae^{t} + Be^{2t} \Rightarrow \dot{x}_p = Ae^{t} + 2Be^{2t} \Rightarrow \ddot{x}_p = Ae^{t} + 4Be^{2t}$$

$$\ddot{x}_p + x_p = e^{t} + 2e^{2t}$$

$$2Ae^{t} + 5Be^{2t} = e^{t} + 2e^{2t} \Rightarrow 2A = 1 \; ; \; 5B = 2$$
$$A = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{2}{5}$$

$$x_p = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{2}{5}e^{2t}$$

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{2}{5}e^{2t}$$

Sad $y(t)$ nije teško odrediti iz druge jednačine

$$\dot{x} - x + y = e^{2t}$$

$$-C_1 \sin t + \underline{C_2 \cos t} + \cancel{\tfrac{1}{2}e^{t}} + \frac{4}{5}e^{2t} \underline{- C_1 \cos t} - C_2 \sin t - \cancel{\tfrac{1}{2}e^{t}} - \frac{2}{5}e^{2t} +$$
$$+ y = e^{2t}$$

$$y(t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t}$$

Rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{2}{5}e^{2t} \\ y(t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t} \end{cases}$$

Odrediti Laplasovu transformaciju f-je

$$f(t) = 3t^3\sin 3t + 2t^2e^{-4t}.$$

Rj. Znamo da je $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}t^n\}(s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ (prema tabeli osnovnih Laplasovih transformacija), pa je

$$\mathcal{L}\{2t^2e^{-4t}\}(s) = 2\mathcal{L}\{e^{-4t}t^2\} = 2\cdot\frac{2!}{(s+4)^3} = \frac{4}{(s+4)^3}$$

Iz osobina Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

Kako je $\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s^2+9}$ to je

$$\mathcal{L}\{3t^3\sin 3t\} = 3\mathcal{L}\{t^3\sin 3t\} = 3(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = 3\left((s^2+9)^{-1}\right)' = 3(-1)(s^2+9)^{-2}\cdot 2s = (-6)\frac{s}{(s^2+9)^2}$$

$$\left(\frac{3}{s^2+9}\right)'' = (-6)\left(\frac{s}{(s^2+9)^2}\right)' = (-6)\frac{1\cdot(s^2+9)^2 - s\cdot 2\cdot(s^2+9)\cdot 2s}{(s^2+9)^2} = 18\frac{s^2-3}{(s^2+9)^3}$$

$$\left(\frac{3}{s^2+9}\right)''' = 18\left(\frac{s^2-3}{(s^2+9)^3}\right)' = \ldots = (-72)\frac{s(s^2-9)}{(s^2+9)^4}$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 216\cdot\frac{s(s^2-9)}{(s^2+9)^4} + \frac{4}{(s+4)^3}$$

Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 10 i 11 sati. Onaj koji prvi dođe čekaće 15 minuta, poslije čega odlazi. Kolika je vjerovatnoća da će se prijatelji susresti?

Rj. Sa x označimo minute dolaska prvog prijatelja a sa y minute dolaska drugog prijatelja. Tako npr. ako je $x=15$ to znači da je prvi prijatelj došao u 10:15, a ako je $x=20$, $y=25$ to znači da je prvi prijatelj došao u 10:20 a drugi prijatelj došao u 10:25.

Posmatrajmo sljedećih nekoliko slučajeva

$x=0 \Rightarrow 0\le y\le 15$

$x=5 \Rightarrow 0\le y\le 20$

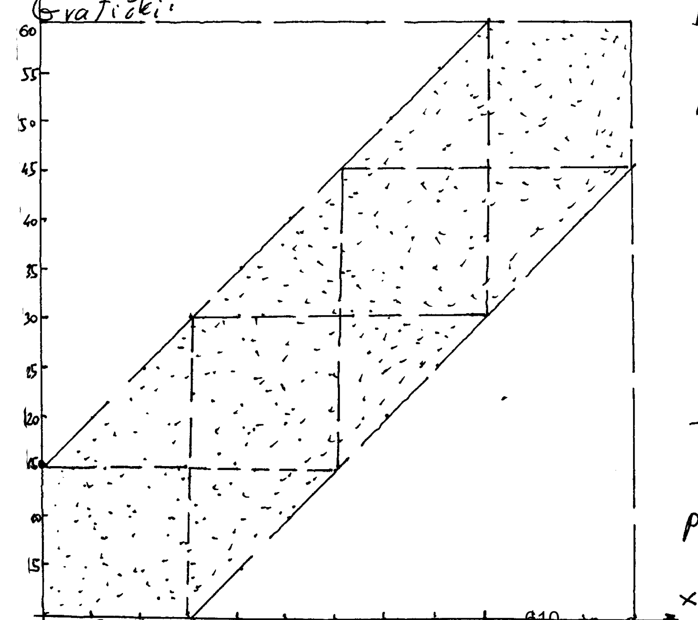
$x=10 \Rightarrow 0\le y\le 25$

$x=15 \Rightarrow 0\le y\le 30$

$x=20 \Rightarrow 0\le y\le 35$

$x=60 \Rightarrow 45\le y\le 60$

Grafički:



Da bi riješili zadatak potrebno je još pronaći površinu ištačkanog dijela na slici kao i površinu čitavog kvadrata. Površina kvadrata je 60^2. Površina ištačkanog dijela je

$$4\cdot 15^2 + 6\cdot\frac{15^2}{2} = 7\cdot 15^2$$

Tražena vjerovatnoća je

$$p = \frac{7\cdot\cancel{15}\cdot\cancel{15}}{\cancel{60}\cdot\cancel{60}} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

(#) Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću slučajnog šuma, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(a) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

(b) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti kada je sredina uzorka 7,8.

Rj.

(a) Iz pretpostavke zadatka nulta hipoteza je

$$H_0 : \mu = 10$$

dok je njezina alternativa

$$H_1 : \mu \neq 10$$

Želimo koristiti 5% nivo značajnosti, tj. $\alpha = 0{,}05$.

$z_{0,05} = ?$

$$P\{Z < z_{0,05}\} = 1 - P\{Z > z_{0,05}\} = 0{,}95$$

$$\left.\begin{aligned} P\{Z < 1{,}64\} &= 0{,}9495 \\ P\{Z < 1{,}65\} &= 0{,}9505 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_{0,05} = 1{,}645$$

Prisjetimo se:

H_0	H_1	Test statistika (TS)	Test α-nivoa značajnosti
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	$\begin{cases} \text{odbaci } H_0, \text{ ako je } \lvert TS\rvert \geq z_{\alpha/2} \\ \text{nemoj odbaciti, usuprotnom} \end{cases}$

p vrijednost ako je $TS = v$

$$2P\{Z \geq |v|\}.$$

Prema tome nama treba $z_{0,025}$ $(= z_{\alpha/2})$

$z_{0,025} = ?$

$$P\{Z < z_{0,025}\} = 1 - P\{Z > z_{0,025}\} = 0{,}975 \overset{\text{iz Tabele}}{\Rightarrow} z_{0,025} = 1{,}96$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}|11{,}6 - 10| = 1{,}79$$

Kako je ova vrijednost manja od 1,79, data hipoteza je vjerodostojna.

(b) Pretpostavimo da je $\overline{X} = 10{,}8$. Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}|10{,}8 - 10| = 0{,}894$$

Kako je $P\{|Z| \geq 0{,}894\} = 2P\{Z \geq 0{,}894\} = 2(1 - P\{Z \leq 0{,}894\}) =$
$= 2(1 - 0{,}8143) = 0{,}371$ (iz tabele)

slijedi da je $p = 0{,}371$ $\Rightarrow$ nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,371.

Za $\overline{X} = 7{,}8$ $\overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\Longrightarrow}$ p vrijednost $= 0{,}014$

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 17.02.2014.

Pismeni ispit iz Inžinjerske matematike III

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 3y + 4 \\ \dot{y} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}$$

2. Primjenom Laplasove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$ty'' - (4t+1)y' + 2(2t+1)y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

3. Na skladištu je 1000 proizvoda i to: 750 proizvoda iz prve i 250 proizvoda iz druge fabrike. Među proizvodima prve fabrike je 5% defektnih a iz druge je 3% defektnih. Kolika je vjerovatnoća da slučajno uzet proizvod iz skladišta bude defektan? Ako je na slučaj uzeti proizvod defektan, kolika je vjerovatnoća da je proizveden u prvoj a kolika da je proizveden u drugoj fabrici?

4. Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

$$15,6; \;\; 16,4; \;\; 14,8; \;\; 17,2; \;\; 16,9; \;\; 15,3; \;\; 14,0; \;\; 15,9$$

(60%) (a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histograma frekvencija tako da ima 3 intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(40%) (b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x - 3y + 4$$
$$\dot{y} = 2x - 2y - 1$$

Rj.

Rješenje sistema će biti f-je $x = x(t)$ i $y = y(t)$.
Prvo odredimo opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema

$$\begin{aligned} 3x - \dot{x} - 3y &= 0 \\ 2x - 2y - \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

$$\dot{x} = \lambda A e^{\lambda x}$$
$$\dot{y} = B\lambda e^{\lambda x}$$
$$\Uparrow$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda x}$, $y = Be^{\lambda x}$ pa ako to uvrstimo u (1) imamo

$$3Ae^{\lambda x} - A\lambda e^{\lambda x} - 3Be^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$$
$$2Ae^{\lambda x} - 2Be^{\lambda x} - B\lambda e^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$$

$$(3-\lambda)A - 3B = 0$$
$$2A + (-2-\lambda)B = 0$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta zadnjeg sistema je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = -6 \underline{-3\lambda} \underline{+2\lambda} + \lambda^2 + 6 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Karakteristična jednačina $\lambda(\lambda-1) = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

a) Za $\lambda_1 = 0$ imamo

$$\begin{aligned} 3A - 3B &= 0 \\ 2A - 2B &= 0 \\ \hline A &= B \end{aligned}$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $B = 1 \Rightarrow A = 1$

$$x_1(t) = 1e^{0t} = 1$$
$$y_1(t) = 1 \cdot e^{0t} = 1$$

b) Za $\lambda_2 = 1$ imamo

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 0 \\ 2A - 3B &= 0 \\ \hline B &= \frac{2}{3}A \end{aligned}$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $A = 3 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow$

$$x_2(t) = 3e^t,$$
$$y_2(t) = 2e^t$$

Opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$x(t) = C_1 + 3C_2 e^t$$
$$y(t) = C_1 + 2C_2 e^t$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t) = C_1(t) + 3C_2(t)e^t$$
$$y(t) = C_1(t) + 2C_2(t)e^t$$

pri čemu izvode C_1', C_2' f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ odredjujemo iz sistema

$$C_1' + 3C_2' e^t = 4$$
$$C_1' + 2C_2' e^t = -1$$

Nepoznate su C_1' i C_2' i ovaj sistem možemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 1 & 2e^t & -1 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{I_v + II_v \cdot 3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{II_v \cdot (-e^{-t})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5e^{-t} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1' = -11, \quad C_2' = 5e^{-t}$$

Integracijom zadnjih jednačina dobijamo

$$C_1(t) = -11t + D_1$$

$$C_2(t) = -5e^{-t} + D_2$$

Kako je

$$C_1(t) + 3C_2(t)e^t = -11t + D_1 - 15 + 3D_2 e^t = D_1 + 3D_2 e^t - 11t - 15$$

i

$$C_1(t) + 2C_2(t)e^t = -11t + D_1 + (-10) + 2D_2 e^t = D_1 + 2D_2 e^t - 11t - 10$$

to je opšte rješenje datog sistema

$$x(t) = D_1 + 3D_2 e^t - 11t - 15$$

$$y(t) = D_1 + 2D_2 e^t - 11t - 10$$

(#) Primjenom Laplasove transformacije riješiti diferencijalnu jednačinu

$$ty'' - (4t+1)y' + 2(2t+1)y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

Rj. Znamo da

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

gdje je $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$. U našem slučaju

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2 Y(s) \qquad \dots (1)$$

Prema osobini Laplasovih transformacija znamo da je

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)}, \quad \text{gdje } F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s).$$

pa imamo (na osnovu (1))

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = (-1)\frac{d}{ds}\left(s^2 Y(s)\right) = (-1)\left(2sY(s) + s^2 Y(s)\right) =$$

$$= -2sY(s) - s^2 Y'(s) \qquad \dots (2)$$

$$\mathcal{L}\{(4t+1)y'\}(s) = 4\mathcal{L}\{ty'\}(s) + \mathcal{L}\{y'\}(s) = 4(-1)\underbrace{\frac{d}{ds}(sY(s))}_{Y(s) + sY'(s)} +$$

$$+ sY(s) = -4Y(s) - 4sY'(s) + sY(s) \qquad \dots (3)$$

$$\mathcal{L}\{2(2t+1)y\}(s) = 4\mathcal{L}\{ty\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) =$$

$$= -4Y'(s) + 2Y(s) \qquad \dots (4)$$

Prema tome

$$ty'' - (4t+1)y' + 2(2t+1)y = 0 \quad /\mathcal{L}$$

pa na osnovu (2), (3) i (4) imamo

$$\underline{-2sY(s)}\ \underline{-s^2Y'(s)} + 4Y(s)\ \underline{+4sY(s)}\ \underline{-sY(s)}\ \underline{-4Y'(s)} + 2Y(s) = 0$$

$$(-s^2+4s-4)Y'(s) - 3sY(s) + 6Y(s) = 0 \qquad /\cdot(-1)$$

$$(s-2)^2Y'(s) + 3(s-2)Y(s) = 0 \qquad /:(s-2)^2$$

$$Y'(s) + \frac{3}{s-2}Y(s) = 0$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{-3}{s-2} \qquad /\int$$

$$\ln Y(s) = (-3)\ln(s-2) + \ln C_1$$

$$Y(s) = \frac{C_1}{(s-2)^3}$$

Prema tabeli Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{t^2e^{+2t}\}(s) = \frac{2!}{(s-2)^3} = \frac{2}{(s-2)^3}$$

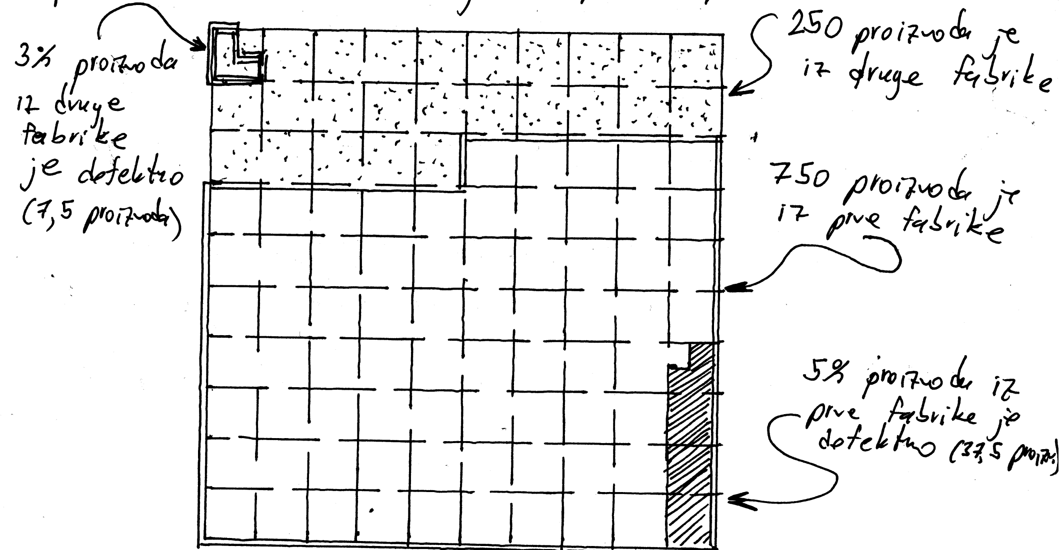
Prema tome

$$y(t) = Ct^2e^{2t}, \quad C \neq 0$$

traženo rješenje

(#) Na skladištu je 1000 proizvoda i to: 750 proizvoda iz prve i 250 proizvoda iz druge fabrike. Među proizvodima prve fabrike je 5% defektnih a iz druge je 3% defektnih. Kolika je vjerovatnoća da slučajno uzet proizvod iz skladišta bude defektan? Ako je na slučaj uzeti proizvod defektan, kolika je vjerovatnoća da je proizveden u prvoj a kolika da je proizveden u drugoj fabrici?

Rj. Sve proizvode iz fabrike predstavimo geometrijski pomoću kvadrata dimenzija 10 puta 10.



Od 1000 proizvoda 45 je defektno.

Neka je D događaj: "da je na slučaj uzeti proizvod iz skladišta defektan". Tada $P(D) = \frac{45}{1000} = 0,045$.

Neka je A događaj: "da je na slučaj uzeti proizvod iz skladišta proizveden u prvoj fabrici", a B događaj:

"da je na slučaj uzeti proizvod iz skladišta proizveden u drugoj fabrici."

U drugom dijelu zadatka trebamo odrediti $P(A|D)$ i $P(B|D)$

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}=\frac{750}{1000}=0,75$$

$$P(B)=\frac{m(B)}{n}=\frac{250}{1000}=0,25$$

Prema Bajesovim formulama je

$$P(A|D)=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}=\frac{0,75\cdot 0,05}{0,045}=0,83333\dots$$

$$P(B|D)=\frac{P(B)\cdot P(D|B)}{P(D)}=\frac{0,25\cdot 0,03}{0,045}=0,166666\dots$$

Dakle, ako je na slučaj izvučen defektan proizvod, vjerovatnoća da je proizveden u prvoj fabrici je

$$P(A|D)=0,83$$

a u drugoj

$$P(B|D)=0,17$$

Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

15,6; 16,4; 14,8; 17,2; 16,9; 15,3; 14,0; 15,9

(a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histogram tako da ima tri intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testivati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

Rj.

(a) Standardnu devijaciju možemo izračunati po formuli

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}{n-1}}$$

Dat je uzorak od 8 vrijednosti.

$$\overline{x}=\frac{15,6+16,4+14,8+17,2+16,9+15,3+14,0+15,9}{8}=15,7625$$

Sredina uzorka je 15,7625.

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=15,6^2+16,4^2+14,8^2+\dots+15,9^2=1995,71$$

$$s^2 = \frac{1995,71 - 8 \cdot 15,7625^2}{7} = 1,15125$$

Standardna devijacija uzorka je $s \approx 1,072$.

Raspon uzorka je $R = 17,2 - 14 = 3,2$

25ti postotak uzorka je ...

$0,25 \cdot 8 = 2$ cio broj, treba nam prosjek druge i treće vrijednosti

Poredajmo brojeve po veličini 14; 14,8; 15,3; 15,6; 15,9; 16,4; 16,9; 17,2

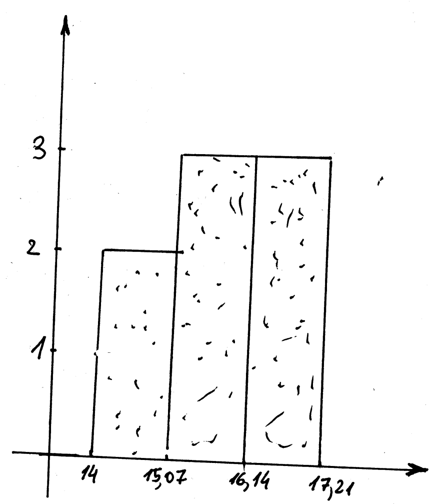
25ti postotak uzorka je 15,05

75ti postotak uzorka je 16,65

Interkvartilni raspon uzorka je 1,06

$3,2 : 3 = 1,0666 \Rightarrow$ uzmimo interval dužine 1,07

Klasa intervala	Frekvencija
[14; 15,07)	2
[15,07; 16,14)	3
[16,14; 17,21)	3



Srednja uzorka je već izračunata

$$\bar{x} = 15,7625$$

Medijana uzorka je 15,75.

Mod uzorka su sve vrijednosti tj. ne postoji podatak sa najvećom frekvencijom.

(b) $\sigma = 2$.

$H_0 : \mu = 15$

$H_1 : \mu \neq 15$

Prosjek od 8 datih vrijednosti je $\bar{X} = 15,7625$.

Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{8}}{2}|15,7625 - 15| \approx 1,0783$$

Kako je

$$P\{|Z| \geq 1,0783\} = 2P\{Z \geq 1,0783\} =$$

$$= 2(1 - P\{Z \leq 1,0783\}) \xlongequal{\text{Prema tabeli}}$$

$$= 2(1 - 0,8596) = 0,2808$$

$P\{Z \leq 1,07\} = 0,8577$

$P\{Z \leq 1,08\} = 0,8599$ $\Rightarrow P\{Z \leq 1,075\} = 0,8588$

$\Rightarrow P\{Z \leq 1,0775\} = 0,8594 \Rightarrow P\{Z \leq 1,0787\} = 0,8597$

Tražena p vrijednost je $p = 0,281$.

Nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,281. Za bilo koji nivo značajnosti veći ili jednako od 0,281 nulta hipoteza će biti odbačena.

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 23.06.2014.

Inžinjerske matematike III, pismeni ispit

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + 2e^t\\ \dot{y} &= x + t\end{aligned}$$

2. Primjenom Laplasove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$tx'' + 2(t-1)x' - 2x = 0; \quad x(0) = 0; \quad x'(0) = 0.$$

3. Na tri mašine se obrađuju isti mašinski elementi i to na prvoj 40%, a na drugoj i trećoj po 30% od svih elemenata. U procesu proizvodnje prva mašina daje 85%, druga 95% a treća 90% ispravnih elemena.

(a) Naći vjerovatnoću da je na slučaj uzeti element ispravan.

(b) Ako je slučajno uzeti element ispravan, kolika je vjerovatnoća da je obrađen na prvoj, drugoj ili trećoj mašini?

4. Prošlogodišnji uzorak testirane ribe iz Boračkog jezera pokazuje da je sredina koncentracije polihorovanog bifelina (PCB) po ribi iznosila 15ti dio miliona sa standardnom devijacijom 2gi dio miliona. Pretpostavimo da je sprovedeno novo testiranje i da slučajni uzorak od 25 riba ima sljedeću koncentraciju

$$15, 16, 17, 18, 17, 18, 12, 14, 11, 17, 13, 14, 14, 12, 12, 16, 13, 11, 14, 15, 16, 13, 10, 19, 20$$

(50%) (a) Naći sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, standardnu devijaciju, varijansu, raspon i interkvartilni raspon datih podataka. Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (naštimati histogram frekvencija tako da ima tačno 4 intervala).

(50%) (b) Pretpostavimo da je standardna devijacija ostala ista (2gi dio miliona). Testirati hipotezu da je sredina PCB koncentracije također ostala nepromjenjena (15ti dio miliona). Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = y + 2e^t$$
$$\dot{y} = x + t$$

Rj: Prvo riješimo odgovarajući homogeni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -\dot{x} + y &= 0 \\ x - \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$

Matrica sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

Za $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} -A + B &= 0 \\ A - B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = B \overset{B=1}{\Rightarrow} \begin{aligned} x_1 &= e^t \\ y_1 &= e^t \end{aligned}$$

Za $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = -B \overset{B=1}{\Rightarrow} \begin{aligned} x_2 &= -e^{-t} \\ y_2 &= e^{-t} \end{aligned}$$

Rješenje homogenog sistema je

$$x = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Sada METODOM VARIJACIJE KONSTANTI pronađimo opšte rješenje nehomogenog sistema.

Nehomogeni sistem ima rješenje sljedećeg oblika

$$x(t) = C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t}$$
$$y(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}$$

pri čemu ćemo izvode f-ja C_1' i C_2' odrediti iz sistema

$$C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-t} = 2e^t$$
$$C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = t$$

(nehomogeni dio ovog sistema je nehomogeni dio sistema diferencijalnih jednačina). Sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^t & -e^{-t} & 2e^t \\ e^t & e^{-t} & t \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}e^{-t}(t+2e^t) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}e^t(t-2e^t) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow C_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(t+2e^t); \quad C_2'(t) = \frac{1}{2}e^t(t-2e^t)$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\int (te^{-t} + 2)\,dt = \dots = t - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} + D_1$$

$$C_2(t) = \frac{1}{2}\int (te^t + 2e^{2t})\,dt = \dots = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + D_2$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t - t + te^t + D_1e^t - D_2e^{-t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + te^t - 1 + D_1e^t - D_2e^{-t}$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = y + 2e^t$$
$$\dot{y} = x + t$$

Rj: Dati sistem napišimo u drugačijem obliku

$$Dx - y = 2e^t$$
$$-x + Dy = t \quad / D \qquad \text{gdje je } Dx = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ Dy = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$Dx - y = 2e^t$$
$$+\ \ -Dx + D^2y = 1$$

$$D^2y - y = 2e^t + 1$$
$$(D^2 - 1)\,y = 2e^t + 1$$

linearna jednačina drugog reda po y – opšte rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata

$$y = y_h + y_p$$

karakteristična jednačina $\lambda^2 - 1 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

Primjetimo da se izraz e^t nalazi u homogenom rješenju pa imamo

$$y_p = Ate^t + Be^t + Ct + D$$
$$y_p' = Ae^t + Ate^t + Be^t - C$$
$$y_p'' = 2Ae^t + Ate^t + Be^t$$

$$\ddot{y} - y = 2Ae^t - Ct - D$$
$$\ddot{y} - y = 2e^t + 1$$

$2A = 2$, $A = 1$ $\qquad C = 0$ $\qquad -D = 1$, $D = -1$

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{c_1 e^{-t}}} + \underline{c_2 e^t} + te^t + \underline{Be^t} - 1$$
$$= D_1 e^t + D_2 e^{-t} + te^t - 1$$

$$\dot{y} = x + t$$
$$x = \dot{y} - t \quad \Rightarrow \quad x = D_1 e^t - D_2 e^{-t} + te^t + e^t - t$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$\begin{cases} x(t) = (D_1 + 1)e^t - D_2 e^{-t} + te^t - t \\ y(t) = D_1 e^t + D_2 e^{-t} + te^t - 1 \end{cases}$$

Primjenom Laplasove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$t x'' + 2(t-1)x' - 2x = 0; \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

Rj: Znamo da

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0) \quad i \quad \mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

gdje je $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$.

$$t x'' + 2(t-1)x' - 2x = 0 \quad /\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}\{t x''\} + 2\mathcal{L}\{(t-1)x'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0 \quad \ldots (*)$$

Pa odredimo prvo $\mathcal{L}\{t x''\}$ i $\mathcal{L}\{(t-1)x'\}(s)$.

Znamo $\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)}$, gdje $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$.

$$\mathcal{L}\{t x''\}(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(s^2 X(s)\right) = (-1)\left(2sX(s) + s^2 X'(s)\right) =$$

$$= -2sX(s) - s^2 X'(s)$$

$$\mathcal{L}\{(t-1)x'\} = \mathcal{L}\{t x'\} - \mathcal{L}\{x'\} = \overbrace{(-1)\frac{d}{ds}(sX(s))}^{(-1)(X(s)+sX'(s))} - sX(s)$$

$$= -X(s) - sX'(s) - sX(s)$$

$$(*) \Rightarrow \quad -2sX(s) - \underline{s^2X'(s)} - 2X(s) - \underline{2sX'(s)} - 2sX(s) - 2X(s) = 0$$

$$(-s^2 - 2s)X'(s) + (-4s-4)X(s) = 0 \quad /:(-1)(s^2+2s)$$

$$X'(s) + \frac{4s+4}{s^2+2s} X(s) = 0$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{X'(s)}{X(s)} = \frac{-4s-4}{s(s+2)} = (-2)\frac{1}{s+2} + (-2)\frac{1}{s} \quad //\int$$

$$\ln X(s) = (-2)\ln(s+2) - 2\ln(s) + \ln C_1$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s^2(s+2)^2}$$

Prema teoremu konvolucije $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)\,G(s)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f*g)(t)$$

U našem slučaju $F(s) = \frac{1}{s^2}$, $G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$

⋮ ZA VJEŽBU

$$x(t) = C(1 - t - e^{-2t} - te^{-2t}), \quad C \neq 0$$

rješenje date diferencijalne jednačine

(#) Na tri mašine se obrađuju isti mašinski elementi i to na prvoj 40%, a na drugoj i trećoj po 30% od svih elemenata. U procesu proizvodnje prva mašina daje 85%, druga 95% a treća 90% ispravnih elemenata.

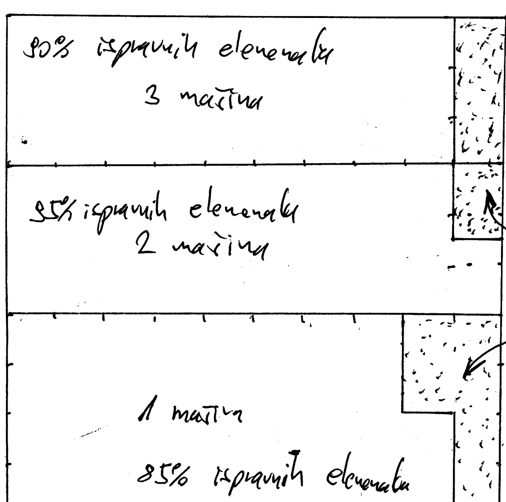
(a) Naći vjerovatnoću da je na slučaj uzeti element ispravan.

(b) Ako je slučajno uzeti element ispravan, kolika je vjerovatnoća da je obrađen na prvoj, drugoj ili trećoj mašini?

Rj: Dio pod (a) možemo uraditi na dva načina - primjenom geometrijske vjerovatnoće ili primjenom formule potpune vjerovatnoće.

(a) I način

Sve elemente koje proizvode tri mašine prikažimo pomoću kvadrata npr. dimenzija 10×10 cm. Tada 40% površine ovog kvadrata su elementi koji su proizvedeni na prvoj mašini, a po 30% kvadrata pripadaju drugoj i trećoj mašini. Sada nacrtajmo 85%, 95% i 90% ispravnih elemenata redom u tri dobijena kvadrata.



Neka je D događaj da je na slučaj uzeti element ispravan, tada

$$P(D)=\frac{m(\text{dio kvadrata koji nije istačkan})}{m(\text{čitav nacrtani kvadrat})}=\frac{89{,}5}{100}=0{,}895$$

II način.

A - događaj da je na slučaj uzeti mašinski element obrađen na prvoj mašini

B - događ. da je na sluč. uz. maš. elem. obrađ. na drugoj mašini

C - —— // —— na trećoj mašini

$P(A)=0{,}4 \qquad P(B)=0{,}3, \qquad P(C)=0{,}3$

D - događaj da je na slučaj izvučeni element ispravan

$P(D|A)=0{,}85, \qquad P(D|B)=0{,}95, \qquad P(D|C)=0{,}9$

Primjenom formule potpune vjerovatnoće dobijamo

$$P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\,P(D|C)=\ldots=0{,}895$$

(b) Prema Bajesovim formulama je

$$P(A|D)=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}85}{0{,}895}\approx 0{,}3799$$

$$P(B|D)=\frac{P(B)\cdot P(D|B)}{P(D)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}895}\approx 0{,}3184$$

tražene vjerovatnoće

$$P(C|D)=\frac{P(C)\cdot P(D|C)}{P(D)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}9}{0{,}895}\approx 0{,}3017$$

Prošlogodišnji uzorak testirane ribe iz Boračkog jezera pokazuje da je sredina koncentracije polihoriranog bifenila (PCB) po ribi iznosila 15ti dio miliona sa standardnom devijacijom 2gi dio miliona. Pretpostavimo da je sprovedeno novo testiranje i da slučajni uzorak od 25 riba ima sljedeću koncentraciju

15, 16, 17, 18, 17, 18, 12, 14, 11, 17, 13, 14, 14, 12, 12, 16, 13, 11, 14, 15, 16, 13, 10, 19, 20

(a) Naći sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, standardnu devijaciju, varijansu, raspon i interkvartilni raspon datih podataka. Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (nacrtati histogram frekvencija tako da ima tačno 4 intervala)

(b) Pretpostavimo da je standardna devijacija ostala ista (2gi dio miliona). Testirati hipotezu da je sredina PCB koncentracije također ostala nepromjenjena (15ti dio miliona). Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće obdaciti nultu hipotezu.

Rj: Prvo primjetimo da date podatke možemo prikazati pomoću sljedeće tabele frekvencija

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f_i	1	2	3	3	4	2	3	3	2	1	1

Suma frekvencija je 25 (veličina uzorka - 25 riba)

Sredina uzorka je

$$\bar{x} = \frac{10\cdot 1+11\cdot 2+12\cdot 3+13\cdot 3+14\cdot 4+15\cdot 2+16\cdot 3+17\cdot 3+18\cdot 2+19+20}{25}$$

$$= \frac{367}{25} = 14,68$$

Broj podataka je neparan, pa je medijana uzorka 14.

Mod uzorka je po definiciji vrijednost koja ima najveću frekvenciju.

Mod uzorka je 14.

Standardnu devijaciju možemo odrediti na osnovu jedne od sljedeće dvije formule

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

$$\sum x_i^2 = 1\cdot 10^2+2\cdot 11^2+3\cdot 12^2+3\cdot 13^2+4\cdot 14^2+2\cdot 15^2+3\cdot 16^2+3\cdot 17^2+2\cdot 18^2 + 19^2+20^2 = 5559$$

$$n\bar{x}^2 = 25\cdot\frac{367^2}{25^2} = \frac{134689}{25} = 5387,56$$

Standardna devijacija je $s = \sqrt{\frac{171,44}{24}} \approx 2,6727$

Varijansa uzorka je $s^2 = \frac{171,44}{24} \approx 7,1433$

Raspon uzorka je $R = 20 - 10 = 10$

Odredimo 25ti i 75ti percentil uzorka

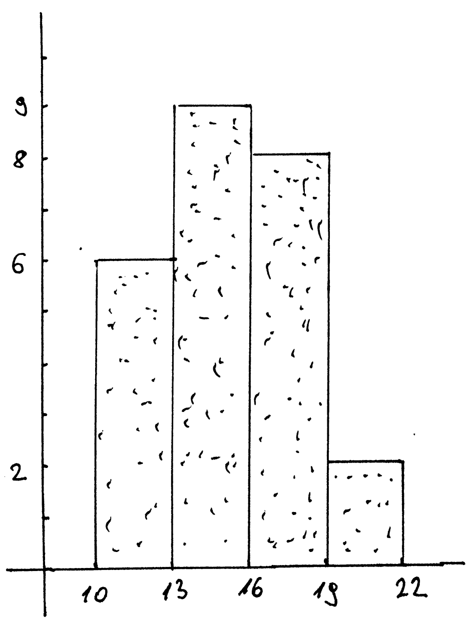
$0,25\cdot 25 = 6,25$ nije cijeli broj $\Rightarrow$ treba nam sedma najmanja vrijednost

$0,75\cdot 25 = 18,75$ nije cijeli broj $\Rightarrow$ treba nam devetnaesta najmanja vrijednost

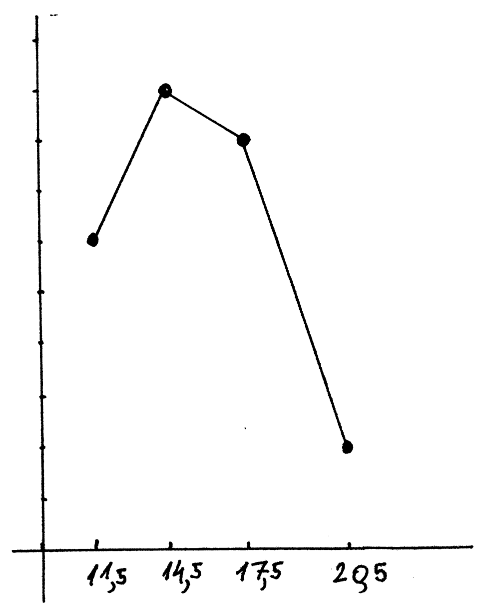
Sedma najmanja vrijednost je 13.
Devetnaesta najmanja vrijednost je 17.
Interkvartilni raspon je 4.

Sad želimo nacrtati histogram frekvencija sa 4 intervala.
Kako je raspon 10 i $\frac{10}{4} = 2,5$ dužina intervala mora sadržavati najmanje tri broja.

Klase intervala	Frekvencija
$[10, 13)$	6
$[13, 16)$	9
$[16, 19)$	8
$[19, 22)$	2



Histogram frekvencija



Poligon frekvencija

(b) Iz postavke zadatka nulta hipoteza je $H_0 : \mu = 15$ dok je njezina alternativa $H_1 : \mu \neq 15$.

Prisjetimo se

H_0	H_1	Test statistika (TS)	Test α-nivoa značajnosti
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0)$	odbaci H_0, ako je $\lvert TS\rvert \geq z_{\alpha/2}$; nemoj odbaciti, u suprotnom

U našem slučaju
$n = 25$, $\sqrt{n} = 5$, $\sigma = 2$, $\overline{X} = 14,68$, $\mu_0 = 15$

Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert = \frac{5}{2}\lvert 14,68 - 15\rvert = 0,8$$

Izračunajmo $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ako je $\alpha = 0,05$.

$$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = ?$$

$$P\{Z < z_{0,025}\} = 1 - P\{Z > z_{0,025}\} = 0,975 \xRightarrow{\text{iz tabele}} z_{0,025} = 1,96$$

Kako je $\lvert TS\rvert < z_{\alpha/2}$ to nemamo razloga odbaciti H_0 sa datim nivoom značajnosti.

Dalje primjetimo $P\{\lvert Z\rvert \geq 0,8\} = 2P\{Z \geq 0,8\} =$

$$= 2(1 - P\{Z < 0,8\}) \xlongequal{\text{prema tabeli}} 2(1 - 0,7881) = 0,4238$$

Tražena p vrijednost je $p = 0,4238$.
Nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,4238. Za bilo koji nivo značajnosti veći ili jednak od 0,4238 nulta hipoteza će biti odbačena.

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 07.07.2014.

Inžinjerska matematika III, pismeni ispit

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x - 3y\\ \dot{y} &= -3x - 2y + 2e^{2t}\end{aligned}$$

2. Odrediti

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}.$$

3. Vjerovatnoća da je na slučaj izabrani kupac namještaja muškarac iznosi 0.65, vjerovatnoća da je kupac osoba u braku jednaka je 0.75, a vjerovatnoća da je oženjeni muškarac je 0.70. Ako slučajno biramo jednog kupca, izračunati vjerovatnoću da je odabrano lice:

(a) ženskog pola;

(b) udata žena;

(c) osoba koja nije u braku;

(d) neudata žena.

4. Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

$$15,6; \quad 16,4; \quad 14,8; \quad 17,2; \quad 16,9; \quad 15,3; \quad 14,0; \quad 15,9$$

(50%) (a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histograma frekvencija tako da ima 3 intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(50%) (b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

(#) Riješiti sistem
$$\dot{x} = -2x - 3y$$
$$\dot{y} = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Rj. Napišimo sistem u operator oznakama
$$\frac{d}{dt}x = -2x - 3y$$
$$\frac{d}{dt}y = -3x - 2y + 2e^{2t}$$

Ako uvedemo oznaku $D = \frac{d}{dt}$ imamo
$$(D+2)x + 3y = 0 \quad \ldots(I) \quad /(D+2)$$
$$3x + (D+2)y = 2e^{2t} \quad \ldots(II) \quad /3$$

Riješimo se y-na:
$$(D+2)^2 x + 3(D+2)y = 0$$
$$- \quad 9x + 3(D+2)y = 6e^{2t}$$
$$(D^2 + 4D - 5)x = -6e^{2t} \quad \ldots(III)$$

Jednačina (III) je linearna jednačina drugog reda po x sa konstantnim koeficijentima - njeno opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata.
$$x = x_h + x_p$$
kar. jedn. $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$
$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-5t}$$
$$x_p = Ae^{2t}$$
$$x_p' = 2Ae^{2t} \qquad x_p'' + 4x_p' - 5x_p = (4A + 8A - 5A)e^{2t} = -6e^{2t}$$
$$x_p'' = 4Ae^{2t} \qquad 7A = -6 \Rightarrow A = -\frac{6}{7}$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}$$

Prva jednačina iz sistema je $\dot{x} = -2x - 3y$ tj.
$$-3y = \dot{x} + 2x \quad /\cdot(-3)$$
$$y = -\frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}x$$
$$y = -\frac{1}{3}\left(C_1 e^t - 5C_2 e^{-5t} - \frac{12}{7}e^{2t}\right) - \frac{2}{3}C_1 e^t - \frac{2}{3}C_2 e^{-5t} + \frac{4}{7}e^{2t}$$
$$y = -C_1 e^t + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$$

Rješenje sistema je
$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t} \\ y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t} \end{cases}$$

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$.

Rj.

$$s^2+2s+10 = s^2+2\cdot s\cdot 1+1-1+10=(s+1)^2+3^2$$

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10}=\frac{3s+2}{(s+1)^2+3^2}$$

Iz tablice elementarnih Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t)=e^{at}\cos bt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t)=e^{at}\sin bt$$

U našem slučaju $a=-1$, $b=3$.

Sljedeći korak je da odredimo konstante A i B iz izraza

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10}=A\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+B\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \qquad /\cdot(s^2+2s+10)$$

$$3s+2=A(s+1)+3B \Rightarrow \begin{matrix} s^0: & A=3 \\ s^1: & A+3B=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=3 \\ B=-\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t)=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t)$$

$$=3e^{-t}\cos 3t-\frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

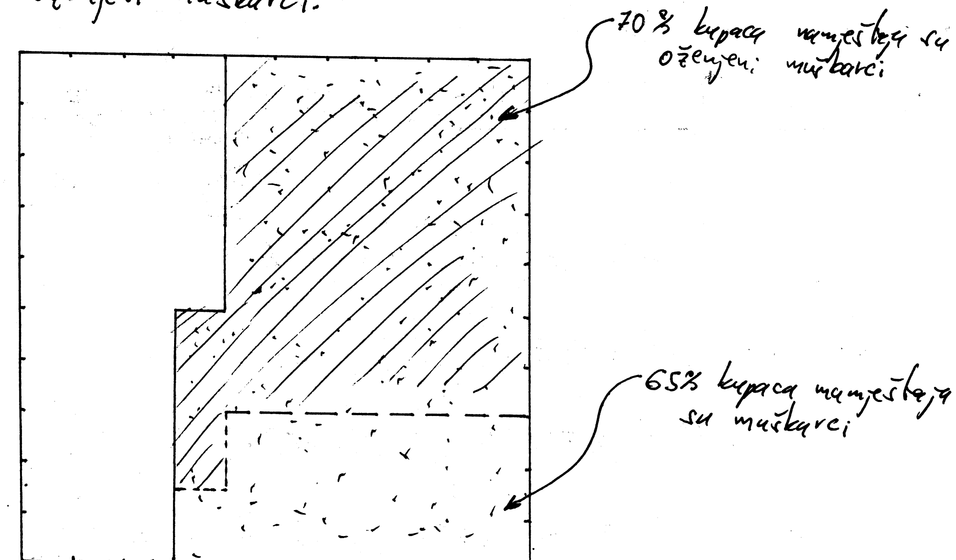
Vjerovatnoća da je na slučaj izabrani kupac namještaja muškarac iznosi 0,65; vjerovatnoća da je kupac osoba u braku jednaka je 0,75; a vjerovatnoća da je oženjeni muškarac je 0,70. Ako slučajno biramo jednog kupca, izračunati vjerovatnoću da je odabrano lice:

(a) ženskog pola; (c) osoba koja nije u braku;

(b) udata žena; (d) neudata žena.

Rj. I dio - korištenjem geometrijske vjerovatnoće

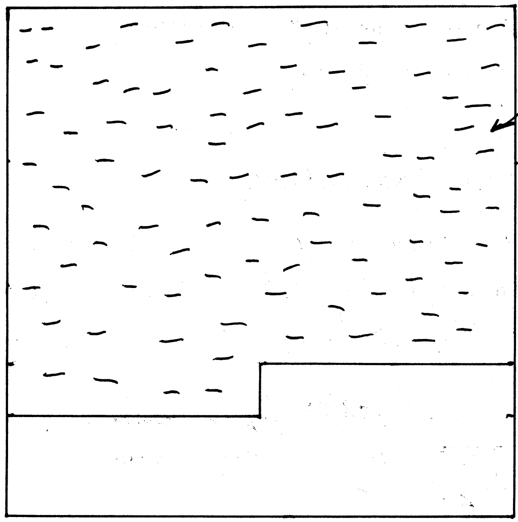
Sve kupce namještaja predstavimo pomoću pravougaonika dimenzija 10×10 cm. Tada 65% tog pravougaonika predstavlja muškarce (označimo taj dio pomoću tačkica), a 70% tog istačkanog dijela znamo da su oženjeni muškarci.



Označimo sa Ž događaj da je "na slučaj izabrani kupac žena", a sa M događaj da je "na slučaj izabrani kupac muškarac". Tada

$$P(Ž)=1-P(M)=0{,}35 \quad \text{ili} \quad P(Ž)=\frac{m(Ž)}{m(kvadrat)}=\frac{35}{100}=0{,}35$$

čime smo riješili dio pod (a). (primjetimo da je $M \cup \check{Z} = K$, gdje je K skup svih kupaca).
Dalje označimo sa O događaj: "na slučaj izabrani kupac je u braku", a sa N događaj: "na slučaj izabrani kupac nije u braku".



vjerovatnoća da je kupac osoba u braku jednaka je 75%

Prema postavci zadatka je

$$P(O)=0,75$$

$$\Downarrow$$

$$P(N) = 1-P(O) = 0,25$$

ili

$$P(N) = \frac{m(N)}{m(\text{ukupno})} = \frac{25}{100} = 0,25$$

čime smo riješili doo pod (c)

II dio – primjenom formule potpune vjerovatnoće

$$P(O) = P(M)\cdot P(O|M) + P(\check{Z})\cdot P(O|\check{Z}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0,75 = 0,65\cdot 0,70 + 0,35\cdot p(O|\check{Z})$$

$$\Rightarrow \quad P(O|\check{Z}) = 0,8428$$

vjerovatnoća da je na slučaj odabrani kupac udata žena 84,28%

$\Rightarrow$ Vjerovatnoća da je slučajni kupac neudata žena je 15,72%.

$\boxed{\text{Primjetimo da je } P(O) = P(M\cap O) + P(\check{Z}\cap O)}$

Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

15,6; 16,4; 14,8; 17,2; 16,9; 15,3; 14,0; 15,9

(a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histogram tako da ima tri intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

Rj.

(a) Standardnu devijaciju možemo izračunati po formuli

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}}$$

Dat je uzorak od 8 vrijednosti.

$$\overline{x} = \frac{15,6+16,4+14,8+17,2+16,9+15,3+14,0+15,9}{8} = 15,7625$$

Sredina uzorka je 15,7625.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 15,6^2 + 16,4^2 + 14,8^2 + \ldots + 15,9^2 = 1995,71$$

$$s^2 = \frac{1995,71 - 8 \cdot 15,7625^2}{7} = 1,15125$$

Standardna devijacija uzorka je $s \approx 1,072$.

Raspon uzorka je $R = 17,2 - 14 = 3,2$

25ti postotak uzorka je ...

$0,25 \cdot 8 = 2$ cio broj, treba nam prosjek druge i treće vrijednosti

Poredajmo brojeve po veličini 14; 14,8; 15,3; 15,6; 15,9; 16,4; 16,9; 17,2

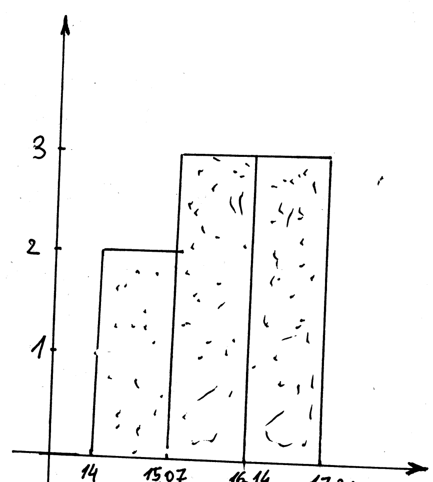
25ti postotak uzorka je 15,05

75ti postotak uzorka je 16,65

Interkvartilni raspon uzorka je 1,06

$3,2 : 3 = 1,0666 \Rightarrow$ uzmimo interval dužine 1,07

Klasa intervala	Frekvencija
[14; 15,07)	2
[15,07; 16,14)	3
[16,14; 17,21)	3



Srednja uzorka je već izračunata

$$\bar{x} = 15,7625$$

Medijana uzorka je 15,75.

Mod uzorka su sve vrijednosti tj. ne postoji podatak sa najvećom frekvencijom.

(b) $\sigma = 2$.

$H_0: \mu = 15$

$H_1: \mu \neq 15$

Prosjek od 8 datih vrijednosti je $\bar{X} = 15,7625$.

Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{8}}{2}|15,7625 - 15| \approx 1,0783$$

Kako je

$$P\{|Z| \geq 1,0783\} = 2P\{Z \geq 1,0783\} =$$

$$= 2(1 - P\{Z \leq 1,0783\}) \overset{\text{Prema tabeli}}{=\!=}$$

$$= 2(1 - 0,8596) = 0,2808$$

$P\{Z \leq 1,07\} = 0,8577$

$P\{Z \leq 1,08\} = 0,8599 \Rightarrow P\{Z \leq 1,075\} = 0,8588$

$\Rightarrow P\{Z \leq 1,0775\} = 0,8594 \Rightarrow P\{Z \leq 1,0787\} = 0,8597$

Tražena p vrijednost je $p = 0,281$.

Nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,281. Za bilo koji nivo značajnosti veći ili jednako od 0,281 nulta hipoteza će biti odbačena.

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 15.09.2014.

Inžinjerska matematika III, pismeni ispit

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Prilikom pisanja rješenja zadataka obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} + x + \ddot{y} + y &= e^t \\ \ddot{x} + \dot{x} + \ddot{y} &= e^{-t} \end{aligned}$$

2. Data je Laplace-ova transformacija funkcije y sa

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{4s^2 - 6s + 15}{s^3 - 2s^2 + 5s}.$$

Odrediti šta je y?

3. Date su dvije skupine proizvoda. Jedna od njih sadrži 12, a druga 10 komada, pri čemu se u obje skupine nalazi po jedan neispravan proizvod. Nasumice je uzet jedan proizvod iz prve skupine i prebačen je u drugu, a poslije toga slučajnim odabirom uzima se jedan proizvod iz druge skupine. Odrediti vjerovatnoću da je taj proizvod neispravan.

4. Na putu kretanja automobila nalazi se 5 semafora. Vjerovatnoća da će se auto zaustaviti na prvom semaforu je 0,4; na drugom 0,6; na trećem 0,5; na četvrtom 0,7 i na petom semaforu 0,4. Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Neka je X slučajna promjenjiva koja predstavlje broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenjive X, a zatim odrediti njenu funkciju raspodjele $F(x)$, matematičko očekivanje $E(x)$ i disperziju $\sigma^2(X)$.

Rješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\ddot{x}+\dot{x}+x+\ddot{y}+y=e^{t}$$
$$\ddot{x}+\dot{x}+\ddot{y}=e^{-t}$$

Rj. Sistem ćemo rješiti metodom svođenja sistema na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda.

Napišimo sistem u operator oznakama ($D=\frac{d}{dt}$)

$$(D^2+D+1)[x]+(D^2+1)[y]=e^{t}$$
$$-\quad (D^2+D)[x]+D^2y=e^{-t}$$
$$\overline{\qquad x+y=e^{t}-e^{-t}\qquad}$$

$$y=-x+e^{t}-e^{-t} \quad \ldots(1) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}=-\dot{x}+e^{t}+e^{-t}$$
$$\ddot{y}=-\ddot{x}+e^{t}-e^{-t} \quad \ldots(2)$$

Ako (1) i (2) uvrstimo u prvu jednačinu sistema imamo

$$\ddot{x}+\dot{x}+x+(-\ddot{x}+e^{t}-e^{-t})+(-x+e^{t}-e^{-t})=e^{t}$$
$$\dot{x}+2e^{t}-2e^{-t}=e^{t}$$
$$\dot{x}=-e^{t}+2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x(t)=-e^{t}-2e^{-t}+C_1$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \qquad y(t)=2e^{t}+e^{-t}-C_1$$

Opšte rješenje sistema je

$$\begin{cases} x(t)=-e^{t}-2e^{-t}+C_1 \\ y(t)=2e^{t}+e^{-t}-C_1 \end{cases}$$

Data je Laplace-ova transformacija f-je y sa

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s}.$$

Odrediti šta je y?

Rj.
$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s} \quad /\mathcal{L}^{-1}$$

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s}\right\}$$

$$\frac{4s^2-6s+15}{s^3-2s^2+5s}=\frac{4s^2-6s+15}{\underbrace{s(s^2-2s+5)}_{\text{ne može se dalje faktorisati}}}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+5} \quad /\cdot s^3-2s^2+5s$$

$$A(s^2-2s+5)+Bs^2+Cs=4s^2-6s+15$$
$$(A+B)s^2+(-2A+C)s+5A=4s^2-6s+15 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} A+B & = & 4 \\ -2A+C & = & -6 \\ 5A & = & 15 \end{array}$$

$$\Rightarrow A=3,\ B=1,\ C=0.$$

Time smo dobili da je:

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{3}{s}+\frac{s}{s^2-2s+5}=\frac{3}{s}+\frac{s-1+1}{(s-1)^2+4}$$
$$=\frac{3}{s}+\frac{s-1}{(s-1)^2+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s-1)^2+4}.$$

Iz tablica Laplasovih transformacija znamo

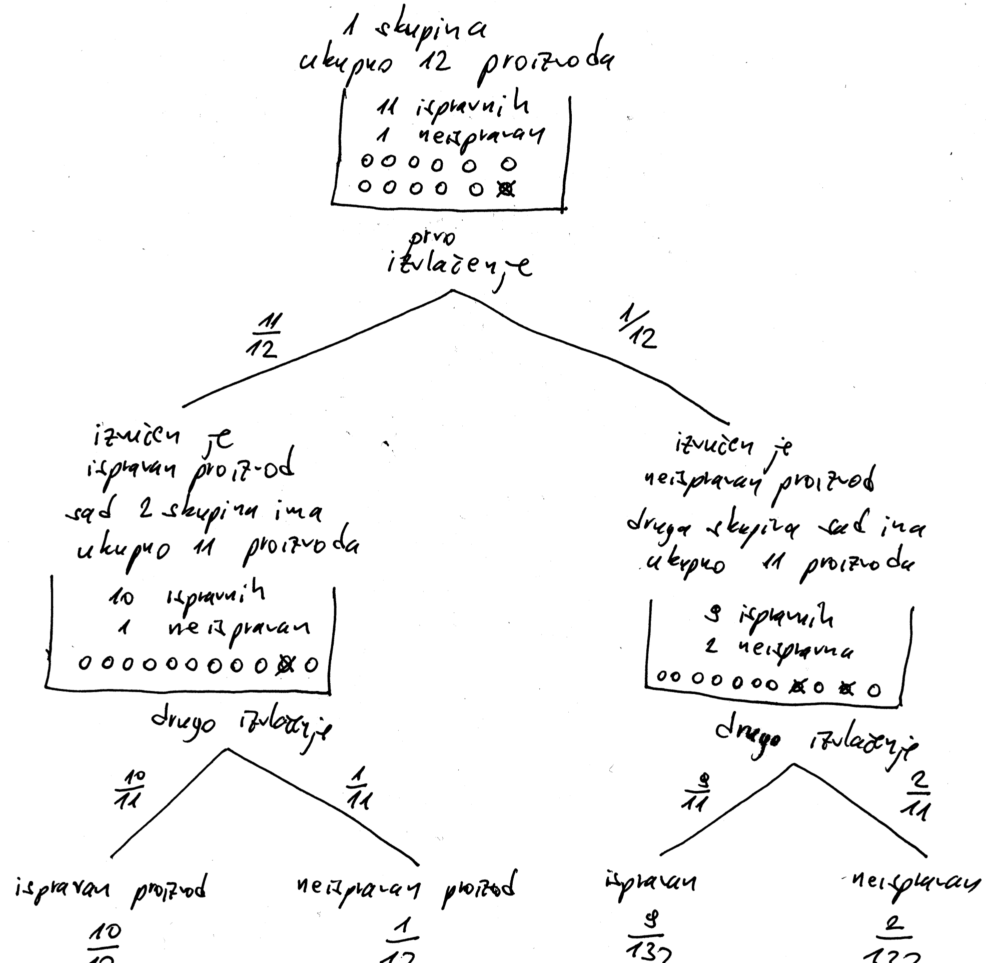
$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s},\ s>0; \quad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}=\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\ s>\alpha;$$
$$\text{i} \quad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}=\frac{\beta}{(s-\alpha)+\beta^2},\ s>\alpha.$$

Prema tome

$$y=3+e^{t}\cos 2t+\frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

Dane su dvije skupine proizvoda. Jedna od njih sadrži 12, a druga 10 komada, pri čemu se u obje skupine nalazi po jedan neispravan proizvod. Nasumice je uzet jedan proizvod iz prve skupine i prebačen u drugu, a poslije toga slučajnim odabirom uzima se jedan proizvod iz druge skupine. Odrediti vjerovatnoću da je taj proizvod neispravan.

Rj. I način



Prostor uzoraka je $S=\{(is,is),(is,ne),(ne,is),(ne,ne)\}$

$$P(\{(is,ne),(ne,ne)\})=\frac{1}{12}+\frac{2}{132}=\frac{13}{132}=0{,}0985$$

Vjerovatnoća da je slučajno odabrani proizvod iz druge skupine neispravan je 9,85%

II način

Neka je:

A_1 događaj da je prvi izvučeni proizvod neispravan

B_1 događaj da je prvi izvučeni proizvod ispravan

A_2 događaj da je drugi izvučeni proizvod neispravan

B_2 događaj da je drugi izvučeni proizvod ispravan

C događaj da je nakon oba izvlačenja slučajno odabrani proizvod iz druge skupine neispravan

Primjetimo $P(C)=P(A_2A_1)+P(A_2B_1)$

$$p(A_2A_1)=p(A_1)\,p(A_2|A_1)=\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{2}{132}$$

$$p(A_2B_1)=p(B_1)\,p(A_2|A_1)=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{12}$$

$$P(C)=\frac{2}{132}+\frac{1}{12}=\frac{13}{132}=0{,}0985$$

tražena vjerovatnoća

(#) Na putu kretanja automobila nalazi se 5 semafora. Vjerovatnoća da će se auto zaustaviti na prvom semaforu je 0,4; na drugom 0,6; na trećem 0,5; na četvrtom 0,7 i na petom semaforu 0,4. Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Neka je X slučajna promjenjiva koja predstavlja broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenjive X i zatim odrediti njenu f-ju raspodjele $F(x)$, matematičko očekivanje $E(X)$ i disperziju $\sigma^2(X)$.

Rj.

Označimo sa Z_i događaj da je vozač zaustavio automobil na i-tom semaforu $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

Kako se na putu kretanja automobila nalazi pet semafora imamo da je $R_X = \{0,1,2,3,4,5\}$ (R_X je skup vrijednosti slučajne promjenjive X).

$P\{X=0\} = P(Z_1) = P\{\text{crveno}\} = 0{,}4$

$P\{X=1\} = P(\bar{Z}_1 Z_2) = P\{(\text{zeleno, crveno})\} = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$

$P\{X=2\} = P(\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 Z_3) = P\{(\text{zeleno, zeleno, crveno})\} = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}12$

$P\{X=3\} = P(\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 Z_4) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}084$

$P\{X=4\} = P(\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 \bar{Z}_4 Z_5) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0144$

$P\{X=5\} = P(\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 \bar{Z}_4 \bar{Z}_5) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0216$

Primjetimo da je

$$0{,}4 + 0{,}36 + 0{,}12 + 0{,}084 + 0{,}0144 + 0{,}0216 = 1.$$

Zakon raspodjele slučajne promjenjive X je

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}4 & 0{,}36 & 0{,}12 & 0{,}084 & 0{,}144 & 0{,}0216 \end{pmatrix}$$

ili tabelarno

k	0	1	2	3	4	5
$P\{X=k\}$	0,4	0,36	0,12	0,084	0,0144	0,0216

Funkcija raspodjele je

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 0{,}4; & 0 \le x < 1 \\ 0{,}76; & 1 \le x < 2 \\ 0{,}88; & 2 \le x < 3 \\ 0{,}964; & 3 \le x < 4 \\ 0{,}9784; & 4 \le x < 5 \\ 1; & 5 \le x \end{cases}$$

Primjetimo se

Matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne promjenjive X je broj definisan sa

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i\, p(x_i), & X \text{ diskretna slučajna promjenjiva} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi_X(x)\, dx, & X \text{ neprekidna slučajna promjenjiva} \end{cases}$$

pod uslovom da odgovarajući red, odnosno integral apsolutno konvergira.

$$E(X) = 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,36 + 2\cdot 0,12 + 3\cdot 0,084 + 4\cdot 0,0144 + 5\cdot 0,0216$$
$$= 1,0176$$

Matematičko očekivanje iznosi 1,0176.

Prisjetimo se

Disperzija $\sigma^2(X)$ slučajne promjenjive X je definisana sa

$$\sigma^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 0^2\cdot 0,4 + 1^2\cdot 0,36 + 2^2\cdot 0,12 + 3^2\cdot 0,084 + 4^2\cdot 0,0144 + 5^2\cdot 0,0216$$
$$= 2,3664$$

$$\sigma^2(X) = 2,3664 - 1,0176^2 = 1,3309$$

tražena disperzija

Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 29.09.2014.

Inžinjerska matematika III, pismeni ispit

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Prilikom pisanja rješenja zadataka obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 3y \\ \dot{y} &= -3x - 2y + 2e^{2t} \end{aligned}$$

2. Data je Laplace-ova transformacija funkcije y sa

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-2s} + 2se^{-5s}}{s^2 + 2}.$$

Odrediti šta je y?

3. Bacaju se dvije obične numerisane kockice. Kolika je vjerovatnoća da je zbir dobijenih brojeva 7, ako se zna da je bar jedan od dobijenih brojeva 5?

4. Na ispitu je bilo 20 studenata. Deset studenata je dobilo ocjenu 8, šest studenata je dobilo ocjenu 9, a četvero je dobilo ocjenu 10. Na slučajan način su izabrana dva studenta i izračunata je njihova prosječna ocjena. Neka je X slučajna promjenjiva čija je vrijednost upravo ta prosječna ocjena dva izabrana studenta. Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promjenjive X.